EFICIENCIA EN EL DISEÑO IMPOSITIVO

Autores:

Licari, Juan Manuel [1]

Miembro del Instituto de Economía y Finanzas y del Departamento de Estadística y Matemática. Universidad Nacional de Córdoba

Oviedo, Jorge Mauricio[2]

Miembro del Departamento de Estadística y Matemática - Universidad Nacional de Córdoba

Resumen: la idea del presente escrito es formular un modelo para la determinación de la estructura tributaria óptima a implementar en una economía. El razonamiento incorporado y la metodología a utilizar guardan relación con lo desarrollado en materia de Análisis de Portafolios por el laureado economista Nobel Markowitz, Harry M.

Palabras clave: Recaudación Impositiva, Eficiencia, Equidad, Estructura Impositiva óptima, Programación Matemática.

Clasificación JEL: C6

[1] licarijm@eco.unc.edu.ar
[2] joviedo@eco.unc.edu.ar

Introducción

Bien sabido es que el Sistema de Mercado, adoptado en la mayoría de las economías del mundo, no necesariamente conduce a una eficiente asignación de los recursos (en el sentido de producir lo que todos quieren y al costo más bajo) debido a la presencia de las denominadas “fallas de mercado”; como son: la existencia de bienes públicos (aquellos que no cuentan con los principios de rivalidad y exclusión) y externalidades (sean éstas positivas o negativas).

Por otro lado, tampoco es cierto que la libre acción del mercado conlleve a una distribución equitativa de la renta ni al pleno aprovechamiento de los factores productivos .

Estos y otros puntos hacen innegable la intervención del Estado en el proceso productivo vía la asignación, redistribución y estabilización; a tal punto que la participación del Sector Público en el PBI en las grandes economías como EE.UU. asciende a no menos de un 30% y a más de un 50% en algunos países europeos.

Así, para cumplir con sus funciones, el Estado requiere de la disponibilidad de recursos financieros (los cuales deben ser extraídos del sector privado). La financiación de los gastos de origen público puede realizarse a través de diversos medios como son los impuestos, aranceles, la deuda pública, la emisión monetaria, las tarifas, los precios, las contribuciones, las transferencias extranjeras, privatizaciones, etc. Dentro de éstos, la **recaudación impositiva** ocupa un lugar más que importante (constituyendo la principal fuente de ingresos para el Estado) y por ello es que debe prestarse singular atención al diseño de la **estructura tributaria**. No deben descuidarse aspectos cruciales como son la **eficiencia** y **equidad** ni inadvertirse del control directo que los contribuyentes poseen al momento de declarar su base imponible. Control directo que se manifiesta en la posibilidad de incurrir en algún tipo de evasión fiscal se esta legal o ilegal. Esta cuestión genera **incertidumbre** para el Estado.

En este contexto, el presente trabajo tiene como objetivo la formulación de un modelo que permita hallar la *estructura tributaria óptima* en una economía dada. Decimos óptima, en el sentido de ser la combinación de alícuotas impositivas que minimicen el riesgo asociado a cada nivel de Recaudación.

Para llevar a cabo esta tarea; haremos uso del instrumental desarrollado por Markowitz Harry M. dado a conocer como **“Portfolio Analysis”**.

Conceptos fundamentales[3]

I) Recaudación Total (*RT*)

Dada la importancia de la Recaudación Impositiva dentro de los Recursos del Estado, se hace necesario dar una definición lo suficientemente amplia y abarcativa de dicho concepto. En este sentido establecemos que la Recaudación Impositiva Total de una economía esta conformada por la suma de la Recaudación de cada Impuesto. Simbólicamente, para el caso de n impuestos tendremos:

$$RT = \sum_{i=1}^{n} RT_i \qquad (1)$$

Siendo: RT: Recaudación Impositiva Total

RT_i: Recaudación del Impuesto i

II) Recaudación de un impuesto (RT_i)

Es dable pensar en la posibilidad de que cada impuesto posea diferentes categorías o estratos[4]. En el presente, hemos supuesto que a cada categoría le corresponde una alícuota impositiva (t_{ij}). Con esto, el valor monetario atribuible a la Recaudación de un Impuesto cualquiera resulta:

$$RT_i = \sum_{j=1}^{m^i} t_{ij} B_{ij} = \begin{bmatrix} t_{i1} & t_{i2} & \cdots & t_{im^i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{im^i} \end{bmatrix} = \mathbf{t_i B_i} \qquad (2)$$

Donde:

t_{ij} : Alícuota del estrato j existente en el impuesto i - ésimo

B_{ij} : Valor de la base imponible del estrato j correspondiente al tributo i

m^i : Número de estratos o categorías que posee el impuesto i - ésimo. Por ello $m^i \geq 1$

$\mathbf{t_i}$: Vector fila de m^i alícuotas impositivas

$\mathbf{\hat{A}_i}$: Vector columna que contiene las m^i Bases Imponibles correspondientes al impuesto i

[3] Hacemos saber que al final del presente trabajo se presenta un Anexo que contiene la descripción de las principales variables utilizadas.
[4] La amplitud conceptual establecida permite incorporar particularidades según sea el caso.

De esta definición surge que se contemplan los casos de impuestos que contienen una sola alícuota aplicable al conjunto de sujetos pasivos como aquellos que en su constitución plantean un cierto número de estratos gravables con alícuotas diferentes. Para el primer caso el valor de m^i será 1, mientras que en el restante resulta $m^i > 1$.

Respecto de las Bases Imponibles, vale mencionar que su cuantificación dependerá del tipo de impuesto que se trate. Así, en el caso de un tributo *Ad-Valorem* las bases imponibles estarán medidas en pesos mientras que si el mismo se refiere a un impuesto E*specífico de $ / Unidad* , las bases se miden en la unidad de medida correspondiente al objeto gravable. Por esto, la definición de Recaudación Impositiva Total es lo suficientemente amplia y flexible como para contemplar estas situaciones.

III) Recaudación dentro de un estrato (para un impuesto cualquiera)

Concentrados en un estrato determinado (j) dentro de un impuesto (i), es posible verificar que lo recaudado por el Estado en esta categoría estará dado por el producto entre la alícuota atribuible y la correspondiente Base Imponible ($t_{ij}B_{ij}$). Ahora bien; este último valor surge de la suma de lo pagado por cada sujeto pasivo que se encuentre enmarcado dentro del impuesto y del estrato que se trate. Considerando que el número de contribuyentes del impuesto i en el estrato j viene dado por p^{ij}, el valor de lo recaudado en la categoría en cuestión se reduce a:

$$t_{ij}B_{ij} = t_{ij}\sum_{k=1}^{p^{ij}} B_{ijk} \qquad (3)$$

Deduciendo que el valor de la Base Imponible del estrato coincide con la suma de las Bases declaradas por los sujetos pasivos obligados:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{p^{ij}} B_{ijk} \qquad (4)$$

Donde:

B_{ijk} : Base Imponible declarada por el individuo k que paga el impuesto i según la categoría j

p^{ij}: Número de contribuyentes del impuesto i en el estrato j.

De acuerdo a lo expuesto: la Base Imponible de un impuesto cualquiera, en un estrato determinado, depende fundamentalmente de los siguientes dos elementos:

a) *El número de contribuyentes que contenga dicho estrato (p^{ij})*

b) *La base imponible que cada contribuyente declare (B_{ijk})*

El gobierno no puede conocer de antemano (con total precisión) cuánto ha de declarar cada individuo o cuántos individuos declararán en cada estrato debido al poder directo que tienen los contribuyentes sobre las bases imponibles. En general, al momento de implementar un nuevo impuesto o modificar uno existente, la autoridad practica estimaciones respecto a los efectos que causará la decisión tomada sobre los agentes económicos.

Seguramente buscará aproximar el **valor a recaudar** con el instrumento en cuestión. Se plantean para ello escenarios factibles, cada uno de los cuales está asociado a una probabilidad de ocurrencia. A partir de este razonamiento es que surge la idea de considerar a las Bases Imponibles (dentro de cada estrato y para cada impuesto) como una **variable incierta** y cuya estimación resulta esencial para el policy maker.

Formulación del modelo

Hemos establecido que B_{ij} es una variable aleatoria. Por ello, podemos definir las siguientes medidas estadísticas asociadas a ella: **valor esperado** ($E(B_{ij})$), **varianza** ($V(B_{ij})$) y **covarianza** ($Cov\,(B_{ij}, B_{mn})$). Recordando lo expuesto en (1) y (2), surge de su combinación:

$$RT = \sum_{i=1}^{n} RT_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m^i} t_{ij} B_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{t_1} & \mathbf{t_2} & \cdots & \mathbf{t_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B_1} \\ \mathbf{B_2} \\ \vdots \\ \mathbf{B_n} \end{bmatrix} = \mathbf{t}\,\mathbf{B} \qquad (5)$$

La expresión (5) representa una **adición de variables aleatorias**, donde cada término de dicha suma resulta ser **el producto de una variable aleatoria** (B_{ij}) **y una constante** (t_{ij}). Queda determinada entonces la Recaudación de cada Impuesto como variable aleatoria. Lo mismo para la Recaudación Total.

A partir de estas definiciones se calculan:

Esperanza de la Recaudación Total:

Para el cálculo de la misma, tómese esperanza a la expresión (5), con lo que tendremos:

$$E(RT) = E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m^i} t_{ij}B_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m^i} E\left(t_{ij}B_{ij}\right)$$, o su equivalente:

$$E(RT) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m^i} t_{ij}E(B_{ij}) = \begin{bmatrix}\mathbf{t_1} & \mathbf{t_2} & \cdots & \mathbf{t_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{E(B_1)} \\ \mathbf{E(B_2)} \\ \vdots \\ \mathbf{E(B_n)}\end{bmatrix} = \mathbf{t}\,\mathbf{E(B)} \qquad (6)$$

Varianza de la Recaudación Total[5]:

$$V(RT) = \mathbf{t}\,\mathbf{Var(B)}\,\mathbf{t'} \qquad (7)$$

<u>Donde</u>:

t : representa un vector fila cuyas componentes son las alícuotas impositivas y su dimensión alcanza el valor: $n\left(\sum_{i=1}^{n} m^i\right)$.

$\mathbf{E(B)}$: es un vector columna cuyos elementos son los valores esperados de las Bases Imponibles. Su dimensión es igual a la del vector **t**: $n\left(\sum_{i=1}^{n} m^i\right)$

$\mathbf{Var(B)}$: se define como la matriz de Varianzas y Covarianzas de las B_{ij}. La dimensión de la misma es $n\left(\sum_{i=1}^{n} m^i\right) \times n\left(\sum_{i=1}^{n} m^i\right)$ y posee además la propiedad de ser: simétrica y definida positiva.

Respecto de las definiciones anteriores; su significado descansa en la idea de aleatoriedad de las Bases junto con la presencia de alícuotas tratadas como constantes. El problema será transformado para introducir en escena a la autoridad encargada del diseño impositivo.

A partir de la información brindada por los Valores Esperados y la matriz de Varianzas y Covarianzas de B_{ij}, el policy maker observa que es posible alcanzar un nivel de Recaudación Total Esperada cualquiera utilizando **diferentes combinaciones de las alícuotas**. Cada alternativa brindará, como se dijo, el mismo valor a recaudar; pero estará asociado a **diferentes niveles de Varianza** para *RT*. Esta puede ser vista

[5] Ver en el Apéndice la composición de la matriz **Var(B).**

como una medida de **riesgo**, por lo que el mecanismo a seguir resultará*: "Para diferentes niveles de RT esperada, la autoridad deberá optar por aquella combinación impositiva que minimice el riesgo asociado (minimice la Varianza)."*

En términos formales, se busca resolver el siguiente planteo:

Minimizar $_{(t)}$: $\mathrm{Var}(\mathrm{RT}) = \mathbf{t}\,\mathbf{Var(B)}\,\mathbf{t'}$

sujeto a $\mathrm{E}(\mathrm{RT}) = \mathbf{t}\ \mathbf{E(B)} = \mathrm{E}(\mathrm{RT})_0$ en las variables que componen a **t** .

Una alternativa de solución al mismo se encuentra utilizando los multiplicadores de Lagrange. Con esto se tiene la siguiente función L:

$$\mathrm{L} = \mathrm{Var}(\mathrm{RT}) + \lambda\,[\mathrm{E}(\mathrm{RT}) - \mathrm{E}(\mathrm{RT})_0] = \mathbf{t}\,\mathbf{Var(B)}\,\mathbf{t'} + \lambda\,[\mathbf{t}\,\mathbf{E(B)} - \mathrm{E}(\mathrm{RT}_0)]$$

Caso 1:

En esta oportunidad se supone que tanto la matriz de varianzas y covarianzas de $\mathbf{B}_{ij}$ como el vector de valores esperados son **independientes** de las alícuotas impositivas[6]. En otras palabras; se argumenta que el estudio de las bases imponibles (en cuanto a su posible distribución como variable aleatoria) se realiza sin considerar al posible valor del vector **t**.

Teniendo en mente estas apreciaciones, damos paso a la solución del problema en cuestión.

Por **condición de primer orden**[7];

$\begin{bmatrix} \partial \mathrm{L} / \partial\, \mathbf{t} \\ \partial \mathrm{L} / \partial\, \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}$; que en este caso sería: $\begin{bmatrix} 2\,\mathbf{Var(B)} & -\mathbf{E(B)} \\ -\mathbf{E(B)'} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathrm{E}(\mathrm{RT})_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}$

La misma se reduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 2\,\mathbf{Var(B)} & -\mathbf{E(B)} \\ -\mathbf{E(B)'} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathrm{E}(\mathrm{RT})_0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

La solución puede hallarse haciendo:

---

[6] Para este caso; Var(B) y E(B) están formados por valores numéricos.

[7] Para una mirada formal respecto de la solución a este tipo de problemas de optimización, puede verse: Licari, Juan Manuel. *"Toma de decisiones financieras"*. Publicado y expuesto en las "XVI Jornadas Nacionales para alumnos de Administración, Contabilidad y Economía". Octubre de 2000. Santa Fe. Argentina.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\mathbf{Var(B)} & -\mathbf{E(B)} \\ -\mathbf{E(B)}' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\,\mathrm{E(RT)}_0 \end{bmatrix}$$

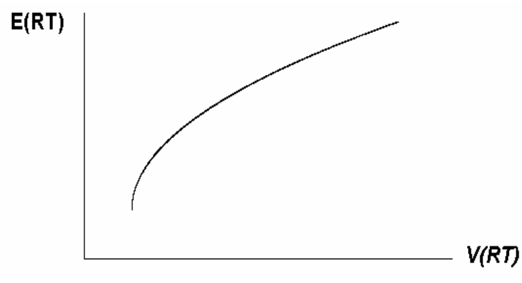
Con respecto a la condición de segundo orden, puede demostrase que la misma siempre se satisface en la medida que **Var(B)** sea definida positiva; situación que está garantizada por ser esta última una matriz de varianzas y covarianzas

Obtenido entonces el vector $\mathbf{t}^*$ solución podemos remplazar al mismo en (7) y evaluar a la función "Varianza de la Recaudación Total" en los valores óptimos; interesados en analizar su relación con la Recaudación Esperada.

Concentrados en esta última cuestión, se tendrá para cada valor de E(RT) al correspondiente en V(RT); quedando al descubierto la dependencia de los $\mathbf{t}^*$ y de V(RT) respecto de E(RT). Repitiendo el procedimiento para todos los valores de la recaudación esperada, se genera un conjunto de pares ordenados en la forma (V(RT); E(RT)).

La ubicación de estos vectores en un par de ejes cartesianos da origen a una figura muy conocida en materia de Análisis Financiero. La misma determina una suerte de frontera, demarcando que para cada valor de Recaudación Esperada deseada el hacedor de política no podrá enfrentarse a un riesgo menor que el delimitado por el valor de V(RT) en la citada curva.

***Gráfico* 1: Frontera de impuestos**



Como se aprecia en el Gráfico 1, al igual que en el caso de carteras de activos, la **pendiente de la frontera es positiva**. El policy maker deberá aceptar riesgos cada vez mayores si pretende alcanzar recaudaciones crecientes. A su vez; el hecho de modificar la estimación de los Valores Esperados y/o la matriz de Varianzas y Covarianzas de B_{ij} repercute trasladando la frontera[8].

El desarrollo anterior se basó en la existencia de n impuestos con m^i estratos (para i = 1, 2, ..., n).

[8] Ello implica que el armado de una frontera se obtiene con modificaciones en los componentes del vector de alícuotas impositivas *t*; (tomando aquellos que sean solución del problema planteado) pero manteniendo constante los valores de E (B_{iji}) y Var (B_{ij}). Alteraciones en estos últimos componentes repercutirán sobre la ubicación de la frontera.

Pasemos a observar con detenimiento lo que ocurre en las siguientes situaciones particulares:

a) Existencia **dos impuestos**; cada uno de ellos con un único estrato o categoría.

La Recaudación Total estará compuesta por la suma de lo percibido en cada uno de los dos gravámenes. Algebraicamente:

$$RT = t_1 B_1 + t_2 B_2$$

Sus medidas estadísticas Esperanza y Varianza serán:

$$E(RT) = t_1 E(B_1) + t_2 E(B_2)$$

$$V(RT) = t_1^2 Var(B_1) + t_2^2 Var(B_2) + 2 t_1 t_2 Cov(B_1, B_2)$$

En este ejemplo, el problema a resolver se reduce a:

Minimizar: $V(RT) = t_1^2 Var(B_1) + t_2^2 Var(B_2) + 2 t_1 t_2 Cov(B_1, B_2)$

Sujeto a: $E(RT)_0 = t_1 E(B_1) + t_2 E(B_2)$

Al igual que en el caso genérico; la solución se halla haciendo:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,V(B_1) & 2\,Cov(B_1, B_2) & -E(B_1) \\ 2\,Cov(B_1, B_2) & 2\,V(B_2) & -E(B_2) \\ -E(B_1) & -E(B_2) & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E(RT)_0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema planteado, se hizo uso del programa: **Mathematica 4.0**

La salida obtenida es la siguiente:

$$\left\{\left\{\lambda \to \frac{2\left(Cov^2\, E0 - E0\, VAR1\, VAR2\right)}{2\, Cov\, E1\, E2 - E2^2\, VAR1 - E1^2\, VAR2},\ t1 \to -\frac{Cov\, E0\, E2 - E0\, E1\, VAR2}{-2\, Cov\, E1\, E2 + E2^2\, VAR1 + E1^2\, VAR2},\ t2 \to \frac{E0\left(Cov\, E1 - E2\, VAR1\right)}{2\, Cov\, E1\, E2 - E2^2\, VAR1 - E1^2\, VAR2}\right\}\right\}$$

Siendo:

λ : Multiplicador de Lagrange

E0: Valor fijado de la Recaudación Total Esperada.

E1: Esperanza de la Base Imponible del gravamen 1.

E2: Esperanza de la Base Imponible del gravamen 2.

VAR1: Varianza de la Base Imponible del impuesto 1.

VAR2: Varianza de la Base Imponible del impuesto 2.

Cov: Covarianza entre las bases imponibles de los dos impuestos

Por otro lado, la condición de segundo orden para este caso establece que la siguiente expresión debe ser menor que cero:

$$2\,Cov\,E1\,E2 - E2^2\,VAR1 - E1^2\,VAR2$$

Situación que se verifica siempre al ser la matriz de varianzas y covarianzas definida positiva.

A partir de la solución encontrada; se obtiene la expresión funcional: **E(RT)= g[V(RT)]** evaluando a V(RT) en su óptimo y despejando E(RT) en función de V(RT). Para este caso dicha relación queda como sigue:

$$E0 \quad VR \quad 2\,Cov\,E1\,E2 - E2^2\,VAR1 - E1^2\,VAR2 \quad VR \quad V$$
$$2\,Cov^2\,E1\,E2 - Cov^2\,E2^2\,VAR1 - Cov^2\,E1^2\,VAR2 - 2\,Cov\,E1\,E2\,VAR1\,VAR2 + E2^2\,VAR1^2\,VAR2 + E1^2\,VAR1\,VAR2^2$$

Observando con detenimiento los valores óptimos de las alícuotas impositivas se pueden obtener siguientes conclusiones en cuanto a su sensibilidad:

- En primer lugar, se aprecia que las soluciones óptimas son cocientes donde el denominador es la condición de segundo orden (que como se dijo anteriormente es negativa). En consecuencia, el valor absoluto de las soluciones depende únicamente del signo de los numeradores.

  Para el caso del valor del multiplicador de Lagrange (lamba) el numerador es negativo a raíz de que la matriz de varianzas y covarianzas es definida positiva; así el valor de λ es positivo sin importar el valor de los restantes parámetros. En cuanto a su significado, se lo interpreta como el cambio en la varianza mínima ante un cambio en la recaudación esperada y en un sentido geométrico indica el valor recíproco de la pendiente de la frontera de recaudación eficiente. De esta manera queda claro que ante un incremento del nivel de recaudación deseado por parte del gobierno, este tendrá que enfrentarse a un mayor nivel de riesgo.

- Concentrados en los valores óptimos de las alícuotas impositivas, se observa una nítida relación lineal respecto del valor deseado de la recaudación esperada y el signo de la misma está condicionado, para el caso de t1, a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial\ t_1{}^*}{\partial\ ER_0} > 0 \Leftrightarrow E(B_2)\,Cov(B_1,B_2) < E(B_1)\,Var(B_2)$$

Así, siempre que la covarianza sea negativa o nula está garantizado que un aumento del nivel deseado de recaudación esperada traería aparejado un incremento en ambas alícuotas impositivas. Para el caso de covarianzas positivas deberá cumplirse la relación anterior para mantener la misma conclusión.

- La condición del párrafo anterior sirve también para dilucidar cuáles son las circunstancias en las que, a través del proceso diversificador de riesgo por parte del gobierno, se llega a subsidiar en vez de gravar a un determinado sector (vía una alícuota negativa). En dicho contexto, será preferible subsidiar a un sector que gravarlo puesto que el proceso optimizador conducirá paradójicamente a una varianza menor y al mismo nivel deseado de recaudación.

- Una cuestión importante también es el estudio de la variación en la alícuota óptima de un impuesto ante un cambio en la varianza de su base imponible. Para ello, el resultado de derivar la alícuota del primer impuesto con respecto a su propia varianza es el siguiente:

$$\frac{E2^{2}\ Cov\ E0\ E2 - E0\ E1\ VAR2}{2\ Cov\ E1\ E2 + E2^{2}\ VAR1 + E1^{2}\ VAR2}$$

Donde puede verse que el denominador es siempre positivo y el numerador está condicionado a la misma relación presentada en los párrafos anteriores. Por ello, siempre que la covarianza sea negativa o nula está garantizado que un aumento de la varianza de un impuesto traerá aparejado una disminución en la alícuota impositiva. Para el caso de covarianzas positivas valen las misma aclaraciones hechas en casos anteriores.

b) Existencia de **tres impuestos** con un estrato en cada uno de ellos.

La Recaudación Total estará compuesta por la suma de lo percibido en cada uno de los tres impuestos. Algebraicamente:

$$RT = t_1 B_1 + t_2 B_2 + t_3 B_3$$

Sus medidas estadísticas Esperanza y Varianza serán:

$$E(RT) = t_1 E(B_1) + t_2 E(B_2) + t_3 E(B_3)$$

$$V(RT) = \sum_{i=1}^{3} t_i^2 V(B_i) + 2 \sum_{j<q} \sum t_j t_q \mathrm{Cov}(B_j, B_q)$$

En este ejemplo, el problema se plantea como sigue:

Minimizar: $V(RT) = \sum_{i=1}^{3} t_i^2 V(B_i) + 2 \sum_{j<q} \sum t_j t_q \mathrm{Cov}(B_j, B_q)$

Sujeto a: $E(RT) = t_1 E(B_1) + t_2 E(B_2) + t_3 E(B_3)$

Operando de manera similar, los resultados a los que se arribaron para el conjunto de alícuotas que minimizan el riesgo recaudatorio son los siguientes:

[illegible] 2 Cov[illegible]3 [illegible]ov12 Co[illegible]3 [illegible] Co[illegible]12 Cov13 E0 E2 - Cov12^2 E0 E3 - Cov23 E0 E2 VAR1 - Cov13 E0 E1 VAR2 + E0 E3
VAR1 VAR2 [illegible]1 [illegible]v23^2 E1^2 - 2 Cov13 Cov23 E1 E2 + Cov13^2 E2^2 - [illegible] Cov12 Cov23 E1 E3 -
2 Co[illegible]12 Co[illegible]13 E2 E3 + Cov12^2 E3^2 + 2 Cov23 E2 E3 VAR1 + 2 Cov13 E1 E[illegible] VAR2 -
E3^2 VAR1 VAR2 + 2 Cov12 E1 E2 VAR3 - [illegible]^2 VAR1 VAR3 - E1^2 VAR2 VAR3 [illegible]
[illegible]Cov[illegible] [illegible]v13 Cov23 E0 E1 - Cov13^2 E0 E[illegible] + Cov12 Cov13 E0 E3 - Cov23 E0 E3 VAR1 -
[illegible]v12 E0 E1 VAR3 + E0 E2 VAR1 VAR3 [illegible]
[illegible]E1 [illegible]v23^2 E1^2 - 2 Cov13 Cov23 E1 E2 + Cov13^2 E2^2 - 2 Cov12 Cov23 E1 E3 [illegible]
2 C[illegible]v12 C[illegible]v13 E2 E3 + Cov12^2 E3^2 + 2 Cov23 E2 E3 VAR1 + 2 Cov13 E1 E[illegible] VAR2 -
E3^2 VAR1 VAR2 + 2 Cov12 E1 E2 VAR3 - [illegible]^2 VAR1 VAR3 - E1^2 VAR2 VAR3 [illegible]
[illegible]VAR[illegible] Cov23^2 E0 E1 + Cov13 Cov23 E0 E[illegible] + Cov12 Cov23 E0 E3 - Cov13 E0 E3 VAR2 -
[illegible]v12 E0 E2 VAR3 + E0 E1 VAR2 VAR3 [illegible]
[illegible]E1 [illegible]v23^2 E1^2 - 2 Cov13 Cov23 E1 E2 + Cov13^2 E2^2 - 2 Cov12 Cov23 E1 E3 [illegible]
2 Cov12 Cov13 E2 E3 + Cov12^2 E3^2 + 2 Cov23 E2 E3 VAR1 + 2 Cov13 E1 E[illegible] VAR2 -
E3^2 VAR1 VAR2 + 2 Cov12 E1 E2 VAR3 - E2^2 VAR1 VAR3 - E1^2 VAR2 VAR3 [illegible]

$$t1 \rightarrow \frac{-Cov23^2\, E0\, E1 + Cov13\, Cov23\, E0\, E2 + Cov12\, Cov23\, E0\, E3 - Cov13\, E0\, E3\, VAR2 - Cov12\, E0\, E2\, VAR3 + E0\, E1\, VAR2\, VAR3}{Cov23^2\, E1^2 - 2\, Cov13\, Cov23\, E1\, E2 + Cov13^2\, E2^2 - 2\, Cov12\, Cov23\, E1\, E3 - 2\, Cov12\, Cov13\, E2\, E3 + Cov12^2\, E3^2 + 2\, Cov23\, E2\, E3\, VAR1 + 2\, Cov13\, E1\, E3\, VAR2 - E3^2\, VAR1\, VAR2 + 2\, Cov12\, E1\, E2\, VAR3 - E2^2\, VAR1\, VAR3 - E1^2\, VAR2\, VAR3},$$

$$t2 \rightarrow \frac{Cov13\, Cov23\, E0\, E1 - Cov13^2\, E0\, E2 + Cov12\, Cov13\, E0\, E3 - Cov23\, E0\, E3\, VAR1 - Cov12\, E0\, E1\, VAR3 + E0\, E2\, VAR1\, VAR3}{Cov23^2\, E1^2 - 2\, Cov13\, Cov23\, E1\, E2 + Cov13^2\, E2^2 - 2\, Cov12\, Cov23\, E1\, E3 - 2\, Cov12\, Cov13\, E2\, E3 + Cov12^2\, E3^2 + 2\, Cov23\, E2\, E3\, VAR1 + 2\, Cov13\, E1\, E3\, VAR2 - E3^2\, VAR1\, VAR2 + 2\, Cov12\, E1\, E2\, VAR3 - E2^2\, VAR1\, VAR3 - E1^2\, VAR2\, VAR3},$$

$$t3 \rightarrow - \frac{Cov12\, Cov23\, E0\, E1 + Cov12\, Cov13\, E0\, E2 - Cov12^2\, E0\, E3 - Cov23\, E0\, E2\, VAR1 - Cov13\, E0\, E1\, VAR2 + E0\, E3\, VAR1\, VAR2}{Cov23^2\, E1^2 - 2\, Cov13\, Cov23\, E1\, E2 + Cov13^2\, E2^2 - 2\, Cov12\, Cov23\, E1\, E3 - 2\, Cov12\, Cov13\, E2\, E3 + Cov12^2\, E3^2 + 2\, Cov23\, E2\, E3\, VAR1 + 2\, Cov13\, E1\, E3\, VAR2 - E3^2\, VAR1\, VAR2 + 2\, Cov12\, E1\, E2\, VAR3 - E2^2\, VAR1\, VAR3 - E1^2\, VAR2\, VAR3}$$

Siendo:

λ : Multiplicador de Lagrange

E0: Valor fijado de la Recaudación Total Esperada.

E1: Esperanza de la Base Imponible del gravamen 1.

E2: Esperanza de la Base Imponible del gravamen 2.

E3: Esperanza de la Base Imponible del gravamen 3.

VAR1: Varianza de la Base Imponible del impuesto 1.

VAR2: Varianza de la Base Imponible del impuesto 2.

VAR3: Varianza de la Base Imponible del impuesto 3.

Cov12: Covarianza entre las bases imponibles de los impuestos 1 y 2.

Cov13: Covarianza entre las bases imponibles de los impuestos 1 y 3.

Cov23: Covarianza entre las bases imponibles de los impuestos 2 y 3.

Al igual que en el caso anterior, los resultados son fracciones donde el denominador es la condición de segundo orden pudiéndose demostrar que la misma está garantizada al ser la matriz de varianzas y covarianzas definida positiva. Idénticas consideraciones pueden realizarse en torno al multiplicador de Lagrange y su signo. Con respecto al resto del análisis que se hizo para el caso de dos impuestos vale destacar que su exposición es algo compleja pero sus interpretaciones pueden extrapolarse diciendo que: existe una situación a partir de la cual un cambio en la recaudación impositiva esperada puede ocasionar la reducción en algunas alícuotas y de igual modo arrojar alícuotas negativas en el proceso de diversificación minimizador de riesgo.

De igual modo puede extenderse este análisis a la existencia de n impuestos considerando además los m^i estratos en cada uno de ellos. La solución a esto ya se dio en forma matricial y las interpretaciones y el signo de λ también se cumplen al igual que el resto de las consideraciones efectuadas (con modificaciones sólo en la relación que marca el límite).

<u>Caso</u> <u>2</u>:

Para el caso anterior se supuso que no existía vinculación entre el comportamiento de las bases imponibles y del valor de las alícuotas impositivas. Ha llegado el momento de levantar esta barrera e introducir en el análisis un argumento más realista. Es de suponer que un sujeto pasivo que afronte la obligación de tributar tomará en cuenta (para la declaración de su Base Imponible) el valor de la alícuota con que será gravado. Esta cuestión modifica al razonamiento desarrollado con anterioridad de la siguiente manera: La Base imponible seguirá siendo una variable incierta para el policy maker, pero ahora deberá considerar que la estimación que haga respecto de la misma estará en función de la alícuota que pretenda aplicar. Así, al incorporar esta situación más realista, se contempla el escenario en que la variabilidad intrínseca de la base imponible (que tiene su fundamento en el poder directo que el contribuyente ejerce al declarar su base imponible) ahora se ve reforzada y mejor descripta a raíz de que los incentivos que impulsan a las acciones de elusión y evasión impositiva guardaran una estrecha relación con los valores de las alícuotas exigidas. De esta manera, los parámetros descriptivos de la aleatoriedad de las bases imponibles (Valores esperados y Varianzas-covarianzas) captarán este nuevo contexto al permitirse que cada una de ellas sea función del conjunto de alícuotas.

Con lo explicado surge que $\mathbf{B_{ij}}$ continúa siendo una variable aleatoria, pero ahora su comportamiento dependerá de las alícuotas **t**. Entonces, **E(B)** y **V(B)**, guardarán relación con **t**. Así:

$$E(RT) = \mathbf{t\,E[B(t)]}$$

$$V(RT) = \mathbf{t\;V[B(t)]\;t'}$$

Donde:

E[B(t)]: Representa un vector columna de valores esperados cuyos componentes dependen de **t**

V[(B)] : Simboliza una matriz de varianzas y covarianzas en donde sus elementos guardan relación con el vector **t**.

De esta manera, el problema del hacedor de política se traduce en elegir las alícuotas impositivas que minimicen el riesgo de la recaudación total esperada considerando todas las modificaciones introducidas con anterioridad. Así:

$$\underline{\textbf{Minimizar}}_{(t)} \quad \mathrm{Var(RT)} = \mathbf{t}\,\mathbf{Var[B(t)]\,t'}$$

$$\textbf{sujeto a} \quad \mathbf{t}\ \mathbf{E[B(t)]} = \mathrm{E(RT)}_0 \quad \text{en las variables definidas por } \mathbf{t}\,.$$

Resolviendo el planteo anterior se obtendrá el vector de alícuotas que minimiza el riesgo de la recaudación total para cada valor de recaudación esperada deseada por el gobierno pudiéndose de igual manera hallar la frontera de impuestos eficientes.

Eficiencia y cuestiones de equidad

Este procedimiento para conseguir las alícuotas eficientes ya sea tanto en el caso que se incorpora dependencia de los parámetros con respecto a las alícuotas como cuando no, puede conducir a situaciones de alta inequidad en el sentido de que es probable que los estratos de menor variabilidad se localicen en los sectores de más bajos recursos (ante las menores posibilidades de evasión y elusión). Por esto, el presente sistema podría calificarse de injusto. Sin embargo la cuestión puede solucionarse mediante la incorporación (dentro de las restricciones del problema) de un conjunto de condiciones adicionales que hagan referencia a la anexión de las consideraciones de equidad. Las más comunes estarán referidas a valores máximos (topes) o mínimos (pisos) de determinadas alícuotas; con lo que el problema de optimización se transformaría como sigue:

$$\mathrm{Min}_{\mathbf{t}} \quad \mathrm{V(R)} = \mathbf{t}\ \mathbf{Var(B)}\ \mathbf{t'}$$
$$\text{sujeto a} \quad \mathrm{E(R)}^{\circ} = \mathbf{t}\ \mathbf{E(B)}$$
$$\mathbf{t_e} \leq \bar{\mathbf{t}}$$

Donde:

$\mathbf{t_e}$ es un vector cuyas componentes representan el conjunto de alícuotas que desean protegerse por cuestiones de equidad

$\bar{\mathbf{t}}$ es un vector cuyos elementos representan los topes máximos permitidos a las alícuotas impositivas que se desea proteger

Las restricciones de desigualdad incorporadas en el problema, no necesariamente deben obedecer a cuestiones de ética social. Un ejemplo alternativo sería la intención de incentivar (en términos fiscales) a determinados estratos económicamente fundamentales (comprensivos de empresas inversoras que proveen grandes fuentes de empleo y de avance).

De esta manera, el proceso de optimización conducirá a la elección de la alícuota que, cumpliendo con los topes impositivos fijados para los sectores de mayor importancia social, minimicen el riesgo para cada valor esperado de la recaudación impositiva total deseada. Dicho riesgo será mayor que en el caso de no incorporar estas restricciones, evidenciando una vez más el tradicional trade-off existente entre eficiencia y equidad.

Alcance del modelo

Al considerar las posibilidades de aplicación del presente modelo, queremos destacar que la amplitud y flexibilidad del mismo lo tornan empíricamente contrastable. Para mencionar algunos de los tópicos a los que el modelo tiene alcance (y que representan cuestiones fundamentales dentro de un esquema tributario) tenemos:

1) **Tipos impositivos:** resulta interesante conocer que existe la posibilidad de incorporar en el análisis tanto impuestos **ad - valorem** como **específicos**[9]. Para el primer caso; la Base Imponible será medida en términos monetarios, siendo la alícuota un valor adimensional representativo del porcentaje elegido para gravar esta actividad. Por ejemplo: se elige un 2% como alícuota para el Valor de un automóvil (según la tasación que reciba el vehículo). En este caso, la alícuota tij = 0,02 y suponiendo un valor para el automotor de $ 10.000 se recaudarán $ 200. Lo importante es que el valor a recaudar siempre resulte

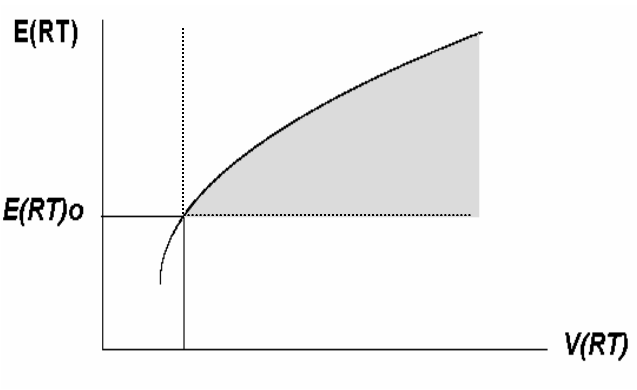
[9] Tal como ha sido adelantado en el apartado II) dentro del tema: Definiciones Básicas en el artículo presente.

expresado en unidades monetarias. Si en cambio se presenta un impuesto específico, la Base Imponible estará expresada en Unidades de la actividad que se grave, mientras que la alícuota asume una dimensión de Unidad Monetaria por cada Unidad de la actividad. Ejemplifiquemos para dejar claro el concepto: Se decide establecer un impuesto de $ 2.000 por cada automóvil cero KM importado (de determinada marca y modelo). La Base será la cantidad de vehículos importados, mientras que la alícuota resulta: t_{ij} = 2.000 ($ / Unidad importada). Lo recaudado estará medido en términos monetarios.

2) **Impuestos y Subsidios:** la generalidad al presentar el problema permite trabajar con subsidios e impuestos al momento de modelar la economía. El policy maker puede estar interesado en apoyar determinada actividad y decide hacerlo vía el otorgamiento de un subsidio (pudiendo ser tanto ad – valorem como específico). En este caso; deberemos adicionar al conjunto de restricciones del problema una expresión que resalte la negatividad de la alícuota de que se trate para adecuar el planteo del problema a nuestras necesidades[10].

3) **Recaudaciones mínimas:** existen casos en los que por necesidades de financiamiento, el gobierno está obligado a recaudar por lo menos un determinado nivel.

***Gráfico* *2*: Recaudación mínima**



En estas situaciones, la frontera se reduce a los pares ordenados cuyos valores de E(*RT*) superan el monto establecido como piso. Si suponemos un valor mínimo dado por $E(RT)_0$ tendremos (según lo observado en el Gráfico 2) una caída en el número de pares ordenados posibles. Sólo serán alcanzables aquellos puntos ubicados en la región sombreada (de color gris). Además; los puntos sobre la frontera y pertenecientes a la zona pintada representan el conjunto de vectores eficiente (el cual es un subconjunto del inicial).

[10] Debe considerarse que para resolver el problema de Programación Matemática planteado con valores de ciertas variables situados entre dos cifras negativas, es necesario en muchos casos el “traslado del Dominio” vía sustitución de variables y de esta manera satisfacer restricciones de no negatividad.

Comentarios finales

A manera de conclusión, queremos destacar que a lo largo de los párrafos anteriores se han dado a conocer los conceptos fundamentales que giran en torno al presente modelo alternativo. Buscamos dejar una clara idea de la metodología aplicada y nos interesamos en destacar la existencia de incertidumbre en el diseño impositivo que lleva a la necesidad de diversificar la cartera impositiva por parte de la autoridad tributaria. Definiendo adecuadamente los conceptos principales, pudo demostrarse que se trata de un problema de optimización similar al planteado en los casos de Análisis de Portafolios.

En lo que se refiere puramente al modelo desarrollado, queremos destacar la flexibilidad que el mismo posee gracias a la amplitud en la definición de sus componentes fundamentales. De esta forma, pueden incorporarse en el análisis la mayoría de los impuestos existentes en una economía.

En este contexto, la Equidad inherente a una estructura tributaria determinada no fue dejada de lado sino incorporada de manera explícita en el tratamiento.

Bibliografía consultada

- Huang, C.J. y Crooke, P.S. (1997), **Mathematics and Mathematica for Economists**, Editorial Blackwell. Malden, Massachussets.
- Licari, Juan Manuel (2000). *“Toma de decisiones financieras”*. XVI Jornadas Nacionales para alumnos de Administración, Contabilidad y Economía. Santa Fe. Argentina.
- Licari, Juan Manuel; Oviedo, Jorge. (2001). “Recaudación Impositiva. Un modelo alternativo”. Mega Jornadas de Contabilidad, Administración y Economía. Publicado por el Centro de Estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas. UNC.
- Musgrave y Musgrave (1986): **Hacienda Pública Teórica y Aplicada**. Madrid, Instituto de Estudios Fiscales.
- Simon, C. y Blume, L. (1999), **Mathematics for Economists**, Norton.

Apéndice:

En el presente se desarrolla la composición de la matriz de Varianzas y Covarianzas de las Bases Imponibles (para el caso de n impuestos con m^i estratos en cada uno de ellos).

Hemos establecido en (7) que la varianza de la Recaudación Total viene dada por:

$$V(RT) = \mathbf{t}\ \mathbf{Var(B)}\ \mathbf{t'}$$

Conocemos también que el vector **t** posee listados todos los valores de las alícuotas. En términos algebraicos:

$$\mathbf{t} = [\mathbf{t_1} \quad \mathbf{t_2} \quad \dots \quad \mathbf{t_n}]$$

Donde cada elemento de **t** resulta ser un vector de la forma:

$$\mathbf{t_i} = [\, t_{i1} \quad t_{i2} \quad \dots \quad t_{im^i} \,] \quad \forall\ i = 1,2,...,n$$

Reemplazando a $\mathbf{t_i}$ en **t**:

$$\mathbf{t} = [t_{11} \quad t_{12} \quad \dots \quad t_{1m^i} \quad t_{21} \quad t_{22} \quad \dots \quad t_{2m^2} \quad \cdots \quad t_{n1} \quad t_{n2} \quad \dots \quad t_{nm^n}]$$

Falta desarrollar la expresión **Var(B)**.

Al contar los elementos del vector **t** se llega a que su dimensión alcanza el valor $n(\sum m^i)$. Para que la forma cuadrática representativa de RT pueda ser calculada, la matriz de Varianzas y Covarianzas debe ser cuadrada y de orden: $n(\sum m^i) \times n(\sum m^i)$.

Conociendo la cantidad de elementos que componen a la matriz, resta por averiguar su estructura. La misma viene dada por:

$$\mathbf{Var(B)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Var(B_1)} & \mathbf{Cov(B_1, B_2)} & \cdots & \mathbf{Cov(B_1, B_i)} \\ \mathbf{Cov(B_2, B_1)} & \mathbf{Var(B_2)} & \cdots & \mathbf{Cov(B_2, B_i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Cov(B_i, B_1)} & \mathbf{Cov(B_i, B_2)} & \cdots & \mathbf{Var(B_i)} \end{bmatrix}$$

Cada uno de los componentes que forman la diagonal resulta ser una matriz de orden m^i x m^i indicando las varianzas **-** covarianzas entre las bases imponibles de los estratos de un **mismo impuesto**; mientras que el resto de sus elementos son las matrices de covarianzas entre las bases imponibles los estratos de **cada par de impuestos distintos**.

En consecuencia; **Var(B)** es una matriz cuadrada de orden $n \times (\sum m^i)$.

Anexo: Tabla resumen de las principales variables utilizadas en el artículo.

Variable	Descripción	Definición
RT	Número	Valor de la Recaudación Total
RTi	Número	Recaudación del impuesto i-ésimo
i	Número	Letra reservada para denominar al impuesto i-ésimo
j	Número	Letra reservada para denominar al estrato j de cualquier impuesto
n	Número	Número de impuestos
mi	Número	Número de estratos del impuesto i
tij	Número	Alícuota del impuesto i-ésimo en el estrato j
Bij	Número	Base Imponible del impuesto i en el estrato j
k	Número	Letra reservada al contribuyente k-ésimo de un impuesto en un estrato determinado
pij	Número	Número de contribuyentes del impuesto i en el estrato j
Bijk	Número	Base Imponible del sujeto contribuyente k en el estrato j del impuesto i
$\mathbf{t_i}$	Vector fila de m^i componentes	Representa el conjunto de alícuotas del impuesto i para los estratos que este posee: $\mathbf{t_i} = \begin{bmatrix} t_{i1} & t_{i2} & \dots & t_{im^i} \end{bmatrix}$
$\mathbf{B_i}$	Vector columna de m^i componentes	Conjunto de Bases Imponibles del impuesto i en los estratos que este posee: $\mathbf{B_i} = \begin{bmatrix} B_{i1} & B_{i2} & \dots & B_{im^i} \end{bmatrix}'$
E(Bi)	Vector columna de m^i componentes	Valores esperados de las bases imponibles declaradas en cada uno de los estratos de un impuesto i **E(Bi)** $= \begin{bmatrix} E(B_{i1}) & E(B_{i2}) & \dots & E(B_{im^i}) \end{bmatrix}'$
t	Vector fila de $n \times (\sum m^i)$ componentes	Conjunto de alícuotas impositivas aplicables a cada uno de los estratos de cada impuesto. Es un vector cuyos elementos son vectores $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{t_1} & \mathbf{t_2} & \cdots & \mathbf{t_n} \end{bmatrix}$

B	Vector columna de n×(Σm^{i}) componentes	Denota al conjunto de n×(Σmi) bases imponibles, es decir a las BI de cada impuesto en cada estrato: $\mathbf{B} = [\mathbf{B_1} \quad \mathbf{B_2} \quad \cdots \quad \mathbf{B_n}]$
E(B)	Vector columna de n(Σm^{i}) componentes	Denota a los valores esperados de las bases imponibles en cada estrato de cada impuestos: $\mathbf{E(B)} = [\mathbf{E(B_1)} \quad \mathbf{E(B_2)} \quad \cdots \quad \mathbf{E(B_n)}]$
Var(B)	Matriz de orden n (Σmi) × n (Σmi)	Representa a la matriz de varianzas y covarianzas de todas las bases imponibles (por estrato y por impuesto) $\mathbf{Var(B)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Var(B_1)} & \mathbf{Cov(B_1,B_2)} & \cdots & \mathbf{Cov(B_1,B_n)} \\ \mathbf{Cov(B_2,B_1)} & \mathbf{Var(B_2)} & \cdots & \mathbf{Cov(B_2,B_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Cov(B_n,B_1)} & \mathbf{Cov(B_n,B_2)} & \cdots & \mathbf{Var(B_n)} \end{bmatrix}$