INTERACCIONES ENTRE EL MULTIPLICADOR-ACELERADOR Y POLÍTICA FISCAL

Autor:

Oviedo, Jorge Mauricio [1]

Miembro del Departamento de Estadística y Matemática - Universidad Nacional de Córdoba

Resumen: la idea del presente escrito es es brindar un análisis exhaustivo de las condiciones de estabilidad y ciclicidad en modelos macroeconómicos simples revisando críticamente las extensiones realizadas por Burrows, P y Hitiris, T. al modelo multiplicador acelerador de Samuelson destacando modificaciones a las conclusiones que estos autores arriban. La metodología incluye tratamiento algebraico y simulaciones animadas en el software Mathematica 4.0

Palabras clave: Interacción Multiplicador-Acelerador – Ecuaciones en diferencias – Raíces características negativas – Ciclos – Convergencia – Sector Monetario – Política Fiscal contracíclica.

Clasificación JEL: H 8

[1] joviedo@eco.unc.edu.ar

1-INTRODUCCIÓN

La primera explicación macroeconómica a cerca de la aparición de ciclos en el comportamiento del nivel de producto fue introducida por Paúl Samuelson, en su famoso artículo "Interactions between the Multiplier Análisis and the Priciple of Acceleration". En el mismo a través de un sencillo modelo macroeconómico retardado en las variables consigue dar una explicación simple y satisfactoria acerca de la posibilidad natural de la presencia de ciclos en las variables económicas.

Más adelante Burrows, P y Hitiris, T. consiguen extender este modelo sencillo incorporando sector monetario e introduciendo política fiscal arribando principalmente a la conclusión de que tales anexiones deparan en un modelo donde aumenta la posibilidad de ocurrencia de comportamientos cíclicos y convergentes de la trayectoria intertemporal del ingreso de la economía.

El objeto del presente trabajo es analizar críticamente las extensiones realizadas por Burrows-Hitiris revisando principalmente las conclusiones a las que estos autores arriban.

La metodología empleada será revisar el marco algebraico de ciclicidad y convergencia de variables de comportamiento dinámico descriptas por ecuaciones en diferencias estableciendo condiciones necesarias y suficientes a los fines de ser aplicadas a estos modelos en discusión. Igual tratamiento se efectuara con respecto a las condiciones de convergencia. Asimismo, se incorporaran simulaciones programadas en Matemática 4.0 para resaltar la validez de estas asunciones.

El trabajo se compone de cinco secciones: en la primera se intentará dejar sentadas las condiciones necesarias y suficientes para la existencias de comportamientos cíclicos en la trayectoria intertemporal de una variable descripta por medio de una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes, destacando como la presencia de al menos una raíz negativa en la ecuación característica puede deparar en un comportamiento oscilante aún ante ausencia de raíces complejas. Se repasaran además en esta parte del escrito las condiciones necesarias y suficientes para que el comportamiento intertemporal de una variable sea convergente o explosivo.

En la segunda sección se volcaran estas ideas en el modelo de Samuelson y en la siguiente en el modelo que incorpora un sector monetario analizando las consecuencias que esto trae aparejado tanto en el comportamiento del nivel de ingreso como en las conclusiones arribadas por Burrows.

En la cuarta sección se presenta el modelo descrito por Burrows donde contempla además un sector Gobierno, que actúa efectuando Políticas Fiscales contracíclicas, revisando críticamente las conclusiones a las que este autor arriba siguiendo los fundamentos teóricos de la primera sección de este escrito.

En la quinta sección se exponen las conclusiones finales de este trabajo brindando un resumen comparativo de este examen crítico.

Las citas bibliográficas principales a las que se recurrió durante el armado del presente se expondrán al final.

A manera de Anexo se describe la metodología empleada en el software Mathematica 4.0 en el cual se desarrollaron varias Simulaciones[2] que permitirán visualizar el comportamiento del nivel de actividad de la economía (presencia o no de ciclos como de convergencia o divergencia) según las condiciones del modelo con el que se trabaje. Además se han programado simulaciones comparativas animadas que dejan visualizar con nitidez las características de cada modelo y la veracidad de las conclusiones arribadas. Los resultados de las mismas se expondrán durante todo el desarrollo de este trabajo.

2-ECUACIONES EN DIFERENCIAS: CONVERGENCIA Y CICLICIDAD DE LAS SOLUCIONES

Los efectos dinámicos de los aceleradores-multiplicadores introducidos por primera vez por Samuelson, continuado y ampliado mas tarde por otros autores suele describirse matemáticamente por una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes. La misma capta con total fidelidad el comportamiento dinámico que los autores tratan de describir. Al respecto se considera apropiado iniciar este artículo con un repaso de tales conceptos matemáticos ya que los mismos tendrán vital repercusión a medida que el mismo avanza.

Una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes y término constantes en su caso mas general tiene la siguiente estructura

$$Y_t + p_1 Y_{t-1} + p_2 Y_{t-2} = p_3 \qquad (1)$$

mientras que la solución a la misma viene dada por la siguiente fórmula:

$$Y_t = A_1 b_1^{\,t} + A_2 b_2^{\,t} + \frac{p_3}{1 + p_1 + p_2} \qquad (2)$$

[2] Si bien en un principio se pensó incorporar en un apéndice la totalidad de las simulaciones animadas, la inmensa extensión de dichas programaciones imposibilitaron su inclusión. Sin embargo, el lector interesado en obtenerlas puede hacerlo enviarme su dirección de correo electronico que por ese medio las pondré a su alcance.

donde los b_1, b_2 representan a las raíces características del siguiente polinomio del mismo nombre asociado a la ecuación en diferencias bajo análisis:

$$x^2 + p_1 x + p_2 = 0 \qquad (3)$$

Dichas raíces juegan un rol esencial en el análisis de estabilidad y ciclicidad de las trayectorias intertemporales que describen sus soluciones. A tales efectos se cuentas con los teoremas:

Primer Teorema de Estabilidad*: "Las soluciones de una ecuación en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes constantes son convergentes (estables*[3]*) si las raíces del polinomio característico asociado son menores que uno en valor absoluto"*

En determinadas circunstancias suele hacerse muy dificultoso establecer el valor absoluto de las raíces características en especial para el economista teórico que trabaja con parámetros no numéricos, por lo que suele ser mucho mas útil esta versión modificada del teorema anterior que establece el análisis de estabilidad en función de los parámetros genéricos de la ecuación en diferencias originales:
Segundo Teorema de Estabilidad*: "Las soluciones de una ecuación en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes constantes son convergentes si y solo si:*

$$1 - p_2 > 0 \qquad (4)$$
$$1 - p_1 + p_2 > 0 \qquad (5)$$
$$1 + p_1 + p_2 > 0 \qquad (6)$$

Resta ahora establecer las condiciones bajo las cuales las trayectorias de solución de la ecuación en diferencias resulta en un comportamiento cíclico a lo largo del tiempo. Estas condiciones son quizás las menos tenidas en cuenta en los análisis teóricos como lo es el caso del articulo de Burrow.
En efecto para la ciclicidad se cuenta con la siguiente regla:
"Una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes tendrá como solución trayectorias intertemporales cíclicas u oscilantes en la medida que se den al menos uno de los siguientes casos:

a) raíces características complejas con parte imaginaria no nula,

---

[3] Es decir $\lim_{t \to \infty} Y_t = \text{cte}$

b) al menos una raíz característica real negativa"

La parte b) de esta regla ha sido en general ignorada en los análisis teóricos teniendo esta omisión efectos que se destacarán mas adelante.

3-MODELO MULTIPLICADOR-ACELERADOR DE SAMUELSON

El trabajo pionero de Samuelson consiste en agregar a un modelo macroeconómico simple de corte Keynesiano, una función de inversión con la innovante particularidad de reaccionar ante los cambios en el consumo de acuerdo a la siguiente especificación general:

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t + G_0 \\ C_t &= cY_{t-1} \\ I_t &= a(C_t - C_{t-1}) \end{aligned} \qquad \text{siendo} \qquad \begin{aligned} &0 < c < 1 \\ &a > 0 \end{aligned}$$

Buscando expresar al Y_t como función de las variables exógenas (G_0) resulta:

$$Y_t - c(1+a)Y_{t-1} + a\,c\,Y_{t-2} = G_0 \qquad \text{(I)}$$

La expresión (I) resulta ser una ecuación en diferencias para la variable Y_t no homogénea, lineal, de parámetros constantes y de orden dos. A continuación se procederá a analizar tanto su estabilidad como su comportamiento cíclico u monótono. Para ello será de suma utilidad expresar su polinomio característico como:

$$x^2 - (1+a)c\,x + a\,c \qquad \text{(II)}$$

$$\text{siendo:} \quad \begin{aligned} &c > 0 \quad \text{Acelerador} \\ &0 < a < 1 \quad \text{Prop. Mg a Consumir} \end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$b_1, b_2 = \frac{(1+a)\,c \pm \sqrt{(1+a)^2 c^2 - 4ac}}{2}$$

Análisis de ciclicidad

Raíces Complejas

Si $(1+a)^2 c^2 - 4a c < 0$ ambas raíces resultan complejas (y conjugadas entre sí), generando entonces una trayectoria oscilatoria de la variable que estamos tratando. Despejando la condición:

$$c < \frac{4a}{(1+a)^2}$$

Recordando que deben cumplirse además las restricciones planteadas a los parámetros del modelo se plantea el siguiente sistema de inecuaciones representativo del conjunto de condiciones:

$$\begin{cases} 0 < c < 1 \\ a > 0 \\ c < \dfrac{4a}{(1+a)^2} \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

Existencia de al menos una raíz real negativa

Teniendo $(1+a)^2 g^2 - 4a g > 0$ se tendrá que[4]:

$$b_1 = \frac{(1+a)g + \sqrt{(1+a)^2 g^2 - 4a g}}{2}$$

$$b_2 = \frac{(1+a)g - \sqrt{(1+a)^2 g^2 - 4a g}}{2}$$

Observando las expresiones puede dilucidarse que en virtud de los signos de los parámetros del modelo, $b_1 > 0$, además al ser $4 a c > 0$ entonces es cierto que:

[4] Al estar en presencia del caso de raíces reales el discriminante del polinomio característico es no negativo.

$$(1+a)c > (1+a)^2 c^2 - 4ac$$

con lo cual b_2 es también no negativo implicando inexistencia de raíces reales negativas.

En consecuencia se establece como **condición necesaria y suficiente** para la presencia de ciclos que las raíces de la ecuación sean complejas.

<u>Análisis de Estabilidad</u>

Haciendo uso de la segunda versión del Teorema de Estabilidad para este tipo de ecuaciones en diferencias resulta:

$$1 - p_2 > 0 \qquad \Rightarrow c < \frac{1}{a} \qquad (7)$$

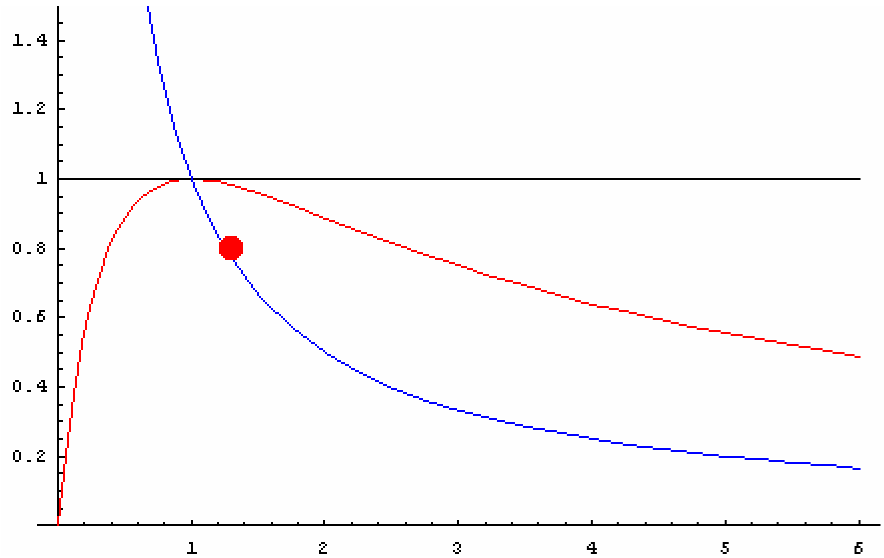
$$1 - p_1 + p_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad c > -\frac{1}{1+2\ a} \quad (siempre\ \ se\ \ cumple)$$

$$1 + p_1 + p_2 > 0 \quad \Rightarrow c < 1 \quad (siempre\ \ se\ \ cumple)$$

de donde se deduce que una condición necesaria y suficiente para la estabilidad del modelo Samuelson es simplemente :

$$c < \frac{1}{a} \qquad (8)$$

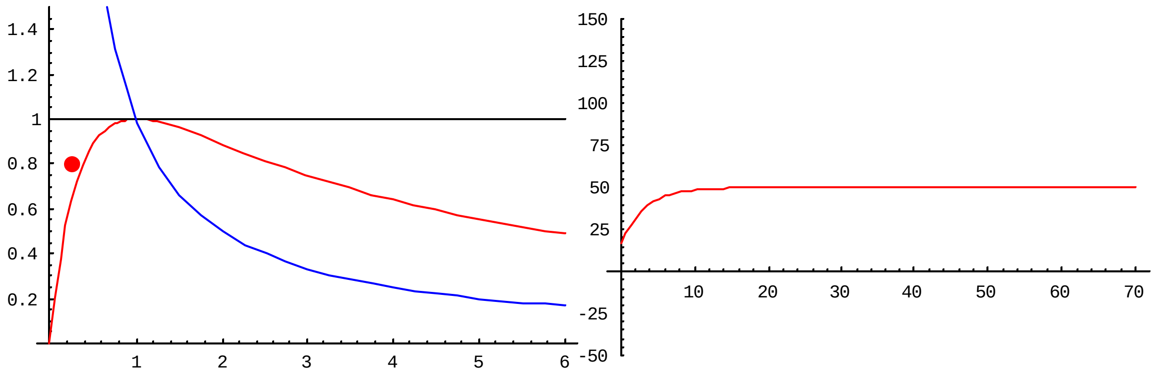
Como puede observarse tanto las condiciones de estabilidad y ciclic idad están expresadas únicamente en términos de los parámetros a y c. A tales efectos resulta sumamente práctico y didáctico volcar estas condiciones en un diagrama bidimensional que permita visualizar con suma claridad ambas condiciones en forma simultánea como sigue:



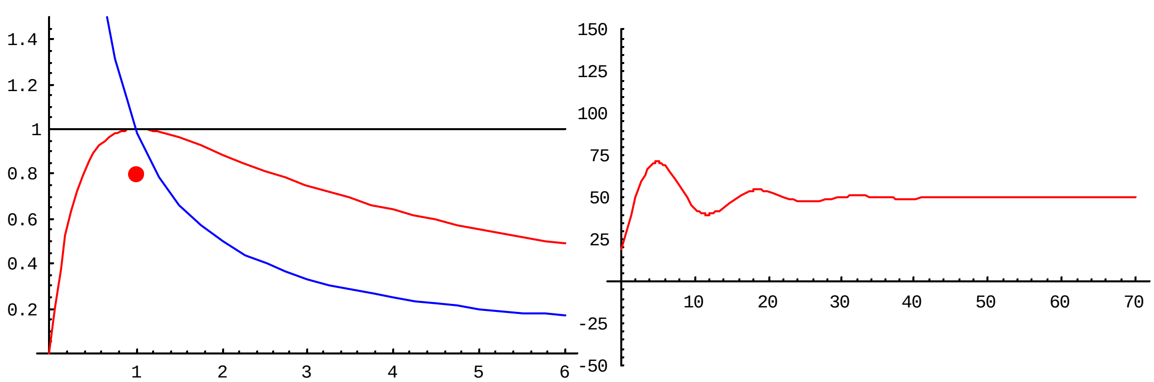
Donde la curva en color rojo representa a la expresión (III) tomada como forma de igualdad de modo que todas las combinaciones de *a* y *c* que se encuentren por debajo de dicha línea depararán en trayectorias intertemporales cíclicas del ingreso. A su vez la línea en trazo azul demarca el limite entre estabilidad e inestabilidad del ingreso a lo largo del tiempo por debajo y por encima respectivamente. Finalmente la línea negra horizontal a la altura de 1 marca el limite máximo permisible para la propensión marginal a consumir (*c*)

De este modo quedan demarcadas cinco regiones que constituyen todas las posibilidades de presentación de trayectorias estables-inestables y cíclicas-monótonas para las trayectorias intertemporales de la variable *Y* que surgen de la solución del modelo. A continuación se detallan las mismas:

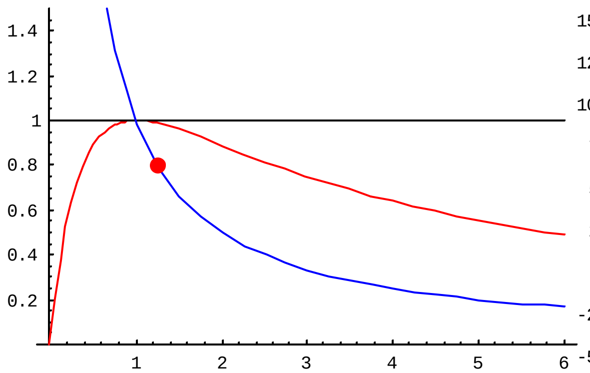
Región Uno: por debajo del trazo negro y del azul y por encima del trazo rojo en el sector izquierdo, representativo del conjunto de combinaciones de *c* y *a* que resultan en trayectorias monótonamente convergentes.

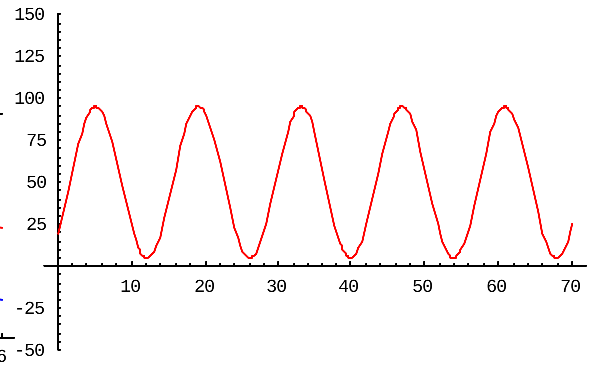


Región Dos: por debajo del trazo rojo y del azul, representativo del conjunto de combinaciones de *c* y *a* que resultan en trayectorias ciclicamente convergentes.

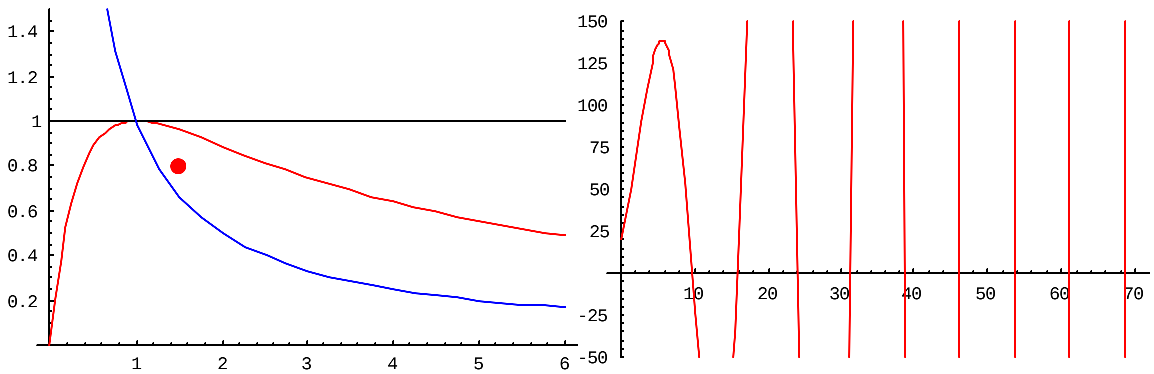


Región Uno: por debajo del trazo rojo y sobre el trazo azul, representativo del conjunto de combinaciones de *c* y *a* que resultan en ciclos regulares.

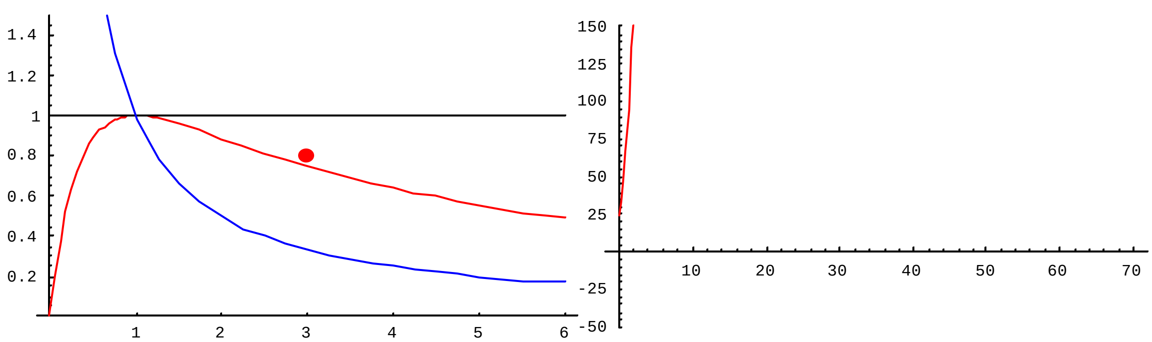




Región Cuatro: por debajo del trazo rojo y por encima del trazo azul, representativo del conjunto de combinaciones de *c* y *a* que resultan en trayectorias cíclicamente divergentes.



Región Cinco: por encima del trazo rojo y del azul, representativo del conjunto de combinaciones de *c* y *a* que resultan en trayectorias monótonamente convergentes.



En las gráficas puede apreciarse no solo las regiones si no también la trayectoria intertemporal de Y a que dan lugar las distintas posibilidades para a y c para una combinación particular representado en el punto color rojo[5].

4-INTRODUCCION DE SECTOR MONETARIO

Como una primera extensión Burrow y Hitiris se ocuparon de añadir un sector monetario al famoso modelo multiplicador acelerador de Samuelson con el objeto de observar las modificaciones en el comportamiento dinámico de la variable Ingreso en esta mejor aproximación a la realidad.

El sector monetario incorporado se especifica como sigue: la demande de dinero es una función de la tasa de interés corriente y del nivel de ingreso del periodo anterior bajo una relación del tipo lineal, mientras que la oferta monetaria es supone constante. El vinculo entre el sector real y el financiero vine dado por la sensibilidad de la demanda de inversión ante cambios en la tasa de interés. Así la especificación del modelo ampliado se establece de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t + G_0 \\ C_t &= C_0 + cY_{t-1} \\ I_t &= a(C_t - C_{t-1}) + Ir\, i_t \\ M_0 &= L_0 + LyY_{t-1} + Lr\, i_t \end{aligned} \qquad \text{siendo} \qquad \begin{aligned} &0 < c < 1 \\ &a > 0 \\ &Ir < 0 \\ &Ly > 0 \\ &Lr < 0 \end{aligned}$$

donde Ir es la sensibilidad de la demanda de inversión ante cambios en la tasa de interés; Lr es la sensibilidad de la demanda de dinero ante cambios en la tasa de interés mientras que Ly es la elasticidad de la demanda de dinero con respecto al ingreso

Ecuación en diferencias asociada al modelo

reagrupando términos convenientemente se puede deducir la siguiente ecuación que resume la dinámica del modelo:

$$\mathbf{Y_t} - [(1+a) - \frac{\mathrm{Ir\ \ Ly}}{\mathrm{Lr}}]\, \mathrm{c}\, \mathbf{Y_{t-1}} + a\, \mathrm{c}\mathbf{Y_{t-2}} = C_0 + G_0$$

[5] La gráficas fueron confeccionadas por medio del software Mathematica 4.0 a través de un conjunto de programaciones destinadas a efectuar simulaciones graficas animadas. El lector interesado en obtener dichas programaciones puede solicitármelo escribiéndome a joviedo@eco.unc.edu.ar .

A su vez la ecuación característica equivalente a la expresión anterior adopta la siguiente estructura:

$$x^2 - [(1+a)c - \frac{Ir\ \ Ly}{Lr}]\ \ x + (a\,c)$$

<u>**Condiciones para la presencia de ciclos**</u>

En virtud de que la presencia de ciclos esta determinada por la aparición de raíces características con componentes imaginaria o (en sentido inclusivo) por al menos una raíz negativa, se dividirá el análisis en estos dos casos:

Raíces imaginarias:

La condición necesaria y suficiente para este subcaso es que el discriminante sea negativo es decir:

$$\{-[(1+a)c - \frac{Ir\ \ Ly}{Lr}]\}^2 < 4\,a\,c \qquad (9)$$

Existencia de la menos una raíz negativa

En virtud de los signos de los parámetros, se puede demostrar[6] que la condición buscada viene dada por:

$$c < \frac{Ir\ \ Ly}{Lr(1+a)} \qquad (10)$$

las dos condiciones anteriores pueden combinarse en una sola dando lugar a un sistema de inecuaciones que determinen la región en la cual las trayectorias intertemporales del ingreso se comporten cíclicamente:

$$\textbf{\textit{Zona de comportamiento cíclico}}: \begin{cases} \{-[(1+a)c - \frac{Ir\ \ Ly}{Lr}]\}^2 < 4\,a\,c \\ c < \frac{Ir\ \ Ly}{Lr(1+a)} \end{cases}$$

<u>**Análisis de estabilidad**</u>

De la aplicación de (2) surge que:

---

[6] Ver Apéndice al final

$$1 - p_2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad c < \frac{1}{a} \qquad (11)$$

$$1 - p_1 + p_2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad c > \frac{\frac{Ir \quad Ly}{Lr} - 1}{(1 + 2 \quad a)} \qquad (12)$$

$$1 + p_1 + p_2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad c < 1 + \frac{Ir \quad Ly}{Lr} \qquad \text{;(siempre secumple)}$$

Con respecto al análisis de Burrows cave resaltar que en el mismo no se tuvieron en cuenta las condiciones (10) y (12).

Habiendo quedado pues sentadas las condiciones de estabilidad y comportamiento cíclico se pasará ahora a comparar las conclusiones de Burrows con las verdaderas.

Conclusiones según Burrows

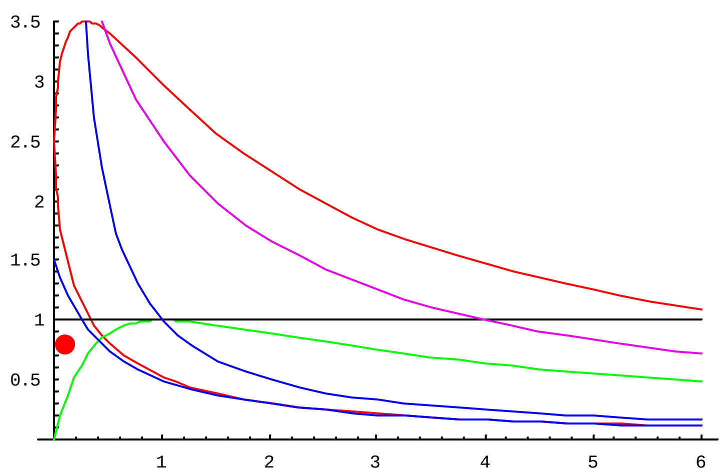
Al haber ignorado las condiciones (10) y (12) las conclusiones a las que arriba son :

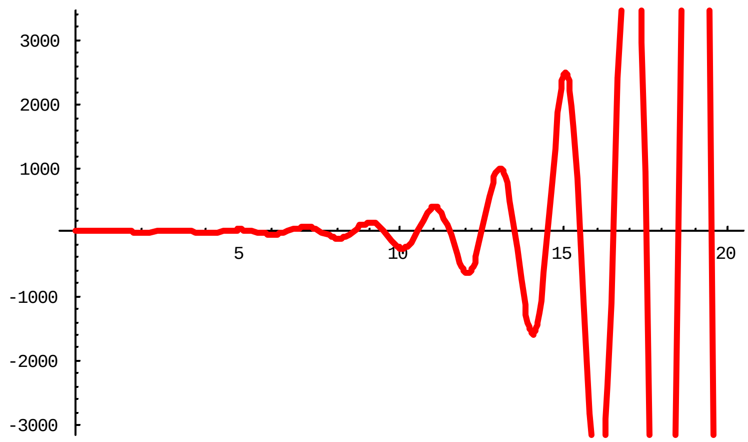
- No se modifica el límite entre zonas estables-no estables
- El modelo tiene mayor posibilidad de comportarse cíclicamente al aumentar las zonas de cíclicos (surge de comparar () con (9)) es decir determinadas combinaciones de a y c que antes convergian monótonamente ahora lo hacen en forma cíclicas. Ídem para divergencia monótona.

Conclusiones revisadas

Incorporando (10) y (12) se tiene:

- En determinadas situaciones para la especificación de los parámetros el modelo (condición 12) se torna mas inestable.
- El modelo es cíclico que lo establecido por Burrows al incorporar (10)





En el primer gráfico la línea en color verde representa a la zona de ciclos cuando no existe sector monetario; el trazo rojo constituye a una curva en cuyo interior se ubicarían las combinaciones de *a* y *c* que deparan en ciclos por raíces imaginarias cuando se introduce sector monetario (condición 9); por debajo de la línea rosa se ubican las combinaciones que arrojan ciclos por raíces negativas (condición 10); finalmente los valores de a y c que se hallan ubicados entre las líneas azules superior e inferior simbolizan a las condiciones 11 y 12 respectivamente.

De las mismas gráficas puede apreciarse con absoluta nitidez que un punto como el rojo en la figura superior depararía de acuerdo a las conclusiones de Burrows y Hitiris en un comportamiento monótonamente convergente mientras que en realidad, como lo demuestra la grafica inferior[7], el comportamiento del ingreso a lo largo del tiempo es divergente y cíclico tal y como lo predicen las condiciones revisadas.

5-<u>INCORPORACION DE POLÍTICA FISCAL</u>

La Extensión que se efectúa con la intención de introducir la política fiscal en este modelo es incluir una función de reaccin del gobierno del siguiente modo:

$$G_t = G_0 + u(Y^* - Y_t^N)$$

donde *Go* es el componente exógeno del gasto público y *u* es le coeficiente de reacción del gobierno ante una brecha dada entre *Y** (el nivel de ingreso objetivo[8]) e *Yt* (el nivel de ingreso actual). En el análisis se supone que $0<u<1$ que significa que las autoridades solo reaccionan parcialmente a la brecha.

[7] Ídem Nota 4.
[8] Se toma como ingreso objetivo el nivel de equilibrio de largo plazo

La incorporación de la ecuación de comportamiento gubernamental ( ) al modelo descrito precedentemente arroja la siguiente ecuación en diferencias que condensa la dinámica del funcionamiento de esta sencilla economía:

$$\mathbf{Y_t} - (1-u)[(1+a) - \frac{\mathrm{Ir\ \ Ly}}{\mathrm{Lr}}]\, c\, \mathbf{Y_{t-1}} + a \quad c \quad (1-u)\mathbf{Y_{t-2}} = C_0 + G_0$$

de la expresión anterior resulta la ecuación característica:

$$x^2 - (1-u)[(1+a)c - \frac{Ir \quad Ly}{Lr}] \quad x + (1-u)(a \quad c)$$

A continuación se hará un análisis análogo al de la sección en cuanto a comportamiento cíclico y estabilidad

Condiciones para la presencia de ciclos

En virtud de que la presencia de ciclos esta determinada por la aparición de raíces características con componentes imaginaria o (en sentido inclusivo) por al menos una raíz negativa, se dividirá el análisis en estos dos casos:

Raíces imaginarias:

La condición necesaria y suficiente para este subcaso es que el discriminante sea negativo es decir:

$$\{-(1-u)[(1+a)c - \frac{Ir \quad Ly}{Lr}]\}^2 < 4 \quad a \quad c(1-u) \qquad (13)$$

Existencia de la menos una raíz negativa

En virtud de los signos de los parámetros, se puede demostrar[9] que la condición buscada viene dada por:

$$c < \frac{Ir \quad Ly}{Lr(1+a)} \qquad (14)$$

las dos condiciones anteriores pueden combinarse en una sola dando lugar a un sistema de inecuaciones que determinen la región en la cual las trayectorias intertemporales del ingreso se comporten cíclicamente:

[9] Ver Apéndice II al final

$$\textbf{\textit{Zona de comportamiento cíclico}}: \begin{cases} \{-(1-u)[(1+a)c - \dfrac{Ir \quad Ly}{Lr}]\}^2 < 4 \quad a \quad c(1-u) \\ c < \dfrac{Ir \quad Ly}{Lr(1+a)} \end{cases}$$

<u>Análisis de estabilidad</u>

De la aplicación de (2) surge que:

$$1 - p_2 > 0 \qquad \Rightarrow c < \frac{1}{a(1-u)} \qquad (15)$$

$$1 - p_1 + p_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad c > \frac{(1-u)\dfrac{Ir \quad Ly}{Lr} - 1}{(1-u)[(1+a)+a]} \qquad (16)$$

$$1 + p_1 + p_2 > 0 \quad \Rightarrow c < 1 + (1-u)\frac{Ir \quad Ly}{Lr} \quad ;\text{(siempre se cumple)}$$

Con respecto al análisis de Burrows cave resaltar que en el mismo no se tuvieron en cuenta las condiciones (13) y (16).

Habiendo quedado pues sentadas las condiciones de estabilidad y comportamiento cíclico se pasará ahora a comparar las conclusiones de Burrows con las verdaderas.

<u>Conclusiones según Burrows</u>

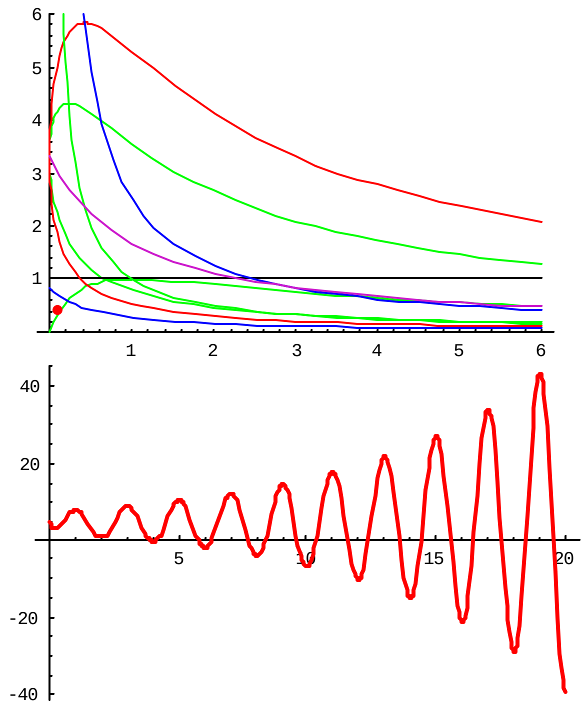
Al haber ignorado las condiciones (13) y (16) las conclusiones a las que arriba son:

- El modelo con política es aun mas cíclico que el con sector monetario y sin política
- Es mas estable

<u>Conclusiones revisadas</u>

Incorporando (13) y (16) se tiene:

- El modelo es <u>más cíclico aun</u> que lo predicho por Burrows (al incorporar (13))
- La incorporación de política fiscal hace al modelo <u>menos estable que lo predicho por Burrows</u> en la medida que $(1-u)IrLy/Lr > 1$ pero <u>*más estable*</u> si lo comparamos con las conclusiones revisadas del modelo sin política y sector monetario.



En la gráfica superior en color rojo se marca la zona de ciclos por raíces complejas; la línea rosa los ciclos por raíces negativas; los contornos azules superior e inferior hacen referencias a las condiciones de estabilidad 15 y 16 mientras que los trazos verdes representan zonas de convergencia y ciclicidad para los modelos anteriores de las secciones 4 y 5. Téngase presente que la línea azul inferior (condición 16) no fue considerada por los autores Burrows y Hitiris de modo que según ellos la zona de convergencia estaba dada por todos los puntos ubicados por debajo de dicha línea. Lo mismo sucedió con la línea color rosa (condición 13).

A los efectos de convalidar las conclusiones revisadas se muestra la trayectoria temporal del ingreso correspondiente a la combinación de *a* y *c* dada por el punto rojo. En efecto de acuerdo a las conclusiones de los autores bajo estudio dicha combinación debiera arrojar un comportamiento convergente y monótono, sin embargo la misma resulta ser divergente y cíclica.

6-<u>CONCLUSIONES</u>

A lo largo de este trabajo se han revisado en forme exhaustivas las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación en diferencias lineales de segundo orden a coeficientes constantes arroje como solución una trayectoria convergente-divergente y oscilante-monótono. Dichas condiciones se aplicaron a los modelos ampliados del acelerador multiplicador que introducen sector monetario y política fiscal resultando como conclusiones fundamentales que dichas extensiones deparaban en una mayor ciclicidad que la predicha por los análisis de Burrows y Hitiris y a su vez en una mayor posibilidad de comportamiento inestable.

APÉNDICE

Condición para la existencia de al menos una raíz negativa:

las raíces para $x^2 - [(1+a)c - \frac{Ir \quad Ly}{Lr}] \quad x + (a\,c)$ vienen dada por:

$$b_1, b_{2,} = \frac{(1+a)c - \frac{IrLy}{Lr} \pm \sqrt{[(1+a)c - \frac{IrLy}{Lr}]^2 - 4ac}}{2}$$

llamando $K = \frac{IrLy}{Lr}$ para abreviar las expresiones se expresiones[10] se tiene:

$$b_1, b_{2,} = \frac{(1+a)c - K \pm \sqrt{[(1+a)c - K]^2 - 4ac}}{2}$$

Al estar analizando exclusivamente el caso de raíces negativas reales [11]la expresión bajo el signo radical es positiva. Además dicha expresión es en valor absoluto menor que $(1+a)c - K$ en consecuencia:

La condición necesaria y suficiente para que existan raíces reales negativas es que $(1+a)c - K$ ***sea menor que cero, es decir cuando:***

$$c < \frac{Ir \quad Ly}{Lr(1+a)}$$

lo cual es la expresión arribada en (10)

---

[10] Nótese que K>0 en virtud de los signos especificados en el modelo.

[11] Recuerde el lector que el objetivo es determinar comportamiento cíclico por raíces negativas reales pues las complejas (positivas o negativas) ya fueron incluidas en la expresión (9).

APÉNDICE II

Condición para la existencia de al menos una raíz negativa en el modelo con política fiscal:

las raíces para $x^2 -(1-u)[(1+a)c - \frac{Ir \quad Ly}{Lr}] \quad x + (1-u)(a \quad c)$ vienen dada por:

$$b_1, b_{2,} = \frac{(1-u)[(1+a)c - \frac{IrLy}{Lr}] \pm \sqrt{\{(1-u)[(1+a)c - \frac{IrLy}{Lr}]\}^2 - 4ac}}{2}$$

llamando $K = \frac{IrLy}{Lr}$ para abreviar las expresiones se expresiones[12] se tiene:

$$b_1, b_{2,} = \frac{(1-u)[(1+a)c - K] \pm \sqrt{\{(1-u)[(1+a)c - K]\}^2 - 4ac}}{2}$$

Al estar analizando exclusivamente el caso de raíces negativas reales [13]la expresión bajo el signo radical es positiva. Además dicha expresión es en valor absoluto menor que $(1-u)[(1+a)c - K]$ en consecuencia[14]:

La condición necesaria y suficiente para que existan raíces reales negativas es que $(1+a)c - K$ ***sea menor que cero, es decir cuando:***

$$c < \frac{Ir \quad Ly}{Lr(1+a)}$$

lo cual es la expresión arribada en (13).

---

[12] Ídem Nota 5.
[13] Ídem Nota 6.
[14] Al ser 1-*u* > 0 de acuerdo a las especificaciones del modelo.

BIBLIOGRAFÍA

Burrows, P. y Hitiris, T., *"Macroeconomics Theory: A Mathematical Introduction"*. John Wiley and Sons Ltd.. G. Britain. 1974. Capitulo 8.

Chiang, Alpha C., *" Métodos fundamentales de economía matemática"*. Mc Graw-Hill. 3° Edición. Madrid. 1987.

Gandolfo, Giancarlo, *"Métodos t modelos matemáticos de la dinámica económica"*. Edit. Tecnos, Madrid, 1976

Samuelson. P. A., *"The interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Aceleration"*. Review of Economic Statistics. Mayo de 1939.