# Optimización Dinámica - Control Óptimo. Implementaciones en Mathematica y Maple

**Jorge Mauricio Oviedo** [1]

**Resumen:** El presente trabajo tiene por objetivo integrar los principios matemáticos de la teoría del Cálculo de Variaciones y el control Óptimo con programaciones computacionales en Softwares algebraicos. Para llevar a cabo dicha tarea se presenta una revisión teórica de tales tópicos de una manera clara y accesible sin por ello perder rigurosidad en su tratamiento. Se brindan además rutinas de programación en Mathematica 5.2 y Maple 10 que automatizan la tarea de resolución de dichos problemas. De esta manera, se logra cumplir el fin de fomentar el uso de tales métodos cuantitativos minimizando el esfuerzo de aprendizaje y resolución. Se incluyen además aplicaciones a la teoría Económica.

**Palabras clave:** Ecuaciones Diferenciales, Calculo de Variaciones, Control Óptimo, Optimización, Ecuación de Euler, Condiciones de Transversalidad.

---

[1] joviedo@eco.unc.edu.ar

## 1.- Motivación

A lo largo de la vida uno aprende a valorar la utilidad de realizar planes para el futuro. Las decisiones presentes afectan las posibilidades de elección futura haciendo que ciertas oportunidades estén o no dentro del rango de elección más adelante. De esta manera las elecciones presentes afectan nuestro bienestar a los largo de todo ese horizonte de planeación.
Sin embargo, la cuestión clave que emerge de esta reflexión es la interdependencia de las decisiones presentes y futuras. De no ser así, el problema planeación a lo largo del tiempo es trivial en el sentido que todo lo que uno necesita hacer es elegir lo mejor en cada instante del tiempo sin importar las repercusiones de tal decisión en el futuro.
Transcribiendo estas ideas de una manera algebraica podemos decir lo siguiente:
En un problema de optimización estática el objetivo es hallar el valor de una variable que maximice una cierta función, es decir:

$$\max_{x} \; F(x) \tag{a}$$

si dicha función es continuamente diferenciable se verificará que ***F'(x*)=0*** donde ***x**** es un valor que maximiza ***F***.
Una generalización hacia un problema de múltiples periodos discretos involucra la elección de ciertas cantidades $\boldsymbol{x_t}$

$$\max_{x_t} \; \sum_{i=1}^{n} F(t, x_t) \tag{b}$$

Siguiendo con el supuesto de que F es continuamente diferenciable se tendrán las siguientes condiciones necesarias de primer orden:

$$\begin{aligned} F_{x_1}(1, x_1) &= 0 \\ F_{x_2}(2, x_2) &= 0 \\ &\vdots \\ F_{x_N}(N, x_N) &= 0 \end{aligned}$$

De donde emerge claramente que dicho sistema de ecuaciones no denota ningún tipo de interdependencias por lo que cada ecuación puede ser resuelta independientemente de las demás. De esta manera, el problema es trivial y no marca ningún tipo de dinámica en la elección de las variables. Obsérvese como éstas reglas algebraicas coinciden con las reflexiones hechas en párrafos anteriores.

El problema se transforma verdaderamente dinámico cuando las decisiones presentes no solo afectan este instante si no también el futuro venidero. Algebraicamente sería el caso de:

$$\max_{\{x_t\}_{t=1}^N} \sum_{i=1}^{n} F(t, x_t, x_{t-1}) \qquad \text{(c)}$$

luego las condiciones de primer orden serán:

$$\begin{aligned}
F_{x_1}(1, x_1, x_0) + F_{x_1}(2, x_2, x_1) &= 0 \\
F_{x_2}(2, x_2, x_1) + F_{x_2}(3, x_3, x_2) &= 0 \\
&\vdots \\
F_{x_{N-1}}(t-1, x_{N-1}, x_{N-2}) + F_{x_{N-1}}(t, x_N, x_{N-1}) &= 0 \\
F_{x_N}(N, x_N, x_{N-1}) &= 0
\end{aligned}$$

Nótese como el valor de $\boldsymbol{x_0}$ debe ser fijado de antemano par determinar el valor de $\boldsymbol{x_1}$. Se aprecia con nitidez la interdependencia del sistema periodo a periodo. Las variables no pueden elegirse independientemente una de otras. Estamos pues frente a un problema de optimización dinámico.

Para generalizar los problemas (c) y (d) al caso de horizonte de planeación continúo se deben hacer algunas consideraciones previas:
Primero téngase presente que el análogo continuo a la sumatoria es una integral y en segundo lugar que la solución óptima será una función continua de t, ***x(t),*** en reemplazo de la secuencia de valores anterior:

$$\begin{aligned}
&\underset{\mathbf{x}(t)}{Max} \int_0^{t_1} F(\mathbf{x}(t), t)\,dt \\
&\text{sujeto a} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0
\end{aligned}$$

Al igual que en (c) el mismo resulta ser no dinámico dado que el integrando solo depende de las elecciones contemporáneas de *x*. Para lograr el equivalente dinámico de un problema en horizonte temporal continuo, se debe hacer aparecer una derivada de la variable de elección en el integrando. Dicho dependencia de la tasa de crecimiento es el puente que comunica íntertemporalmente las decisiones tomadas transmitiendo así dinámica al sistema continuo.

$$\begin{aligned}
&\underset{\mathbf{x}(t)}{Max} \int_0^{t_1} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), t)\,dt \\
&\text{sujeto a} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0
\end{aligned}$$

Este planteo corresponde al tratamiento clásico del Cálculo de Variaciones[2].

[2] Vease Oviedo [2005] para una discusión sobre las condiciones necesarias para resolver éste problema.

## 2.- El problema del Control Óptimo

Si bien el problema anterior puede resolverse por el método clásico del Cálculo de Variaciones, el mismo puede ser generalizado para considerar situaciones mas especificas en donde por ejemplo se consideren ciertas restricciones[3] sobre las derivadas de la función buscada.
El espíritu del Control Óptimo descansa en la manera óptima de gobernar la evolución de un cierto sistema dinámico. De ésta manera partimos de un sistema dinámico que evoluciona íntertemporalmente en un periodo de tiempo [$\boldsymbol{t_0}$, $\boldsymbol{t_1}$] por medio de una ecuación de estado (ecuación diferencial de primer orden) que describe la dinámica evolutiva de una cierta variable $\boldsymbol{x(t)}$ llamada ***variable de estado*** desde una condición inicial $\boldsymbol{x_0}$. Dicha evolución del sistema depende de una cierta función $\boldsymbol{u(t)}$ sobre la cual se tiene cierto control (de ahí que se llame a ésta variable, ***variable de control***) y se intenta con ella lograr influir en la evolución de $\boldsymbol{x(t)}$ de modo tal que haga máximo un funcional. Dicho funcional está compuesto por una integral definida cuyo integrando depende tanto de la evolución intertemporal de las variables de estado, de la de control como del tiempo mismo en su versión mas general[4]
En otras palabras lo dicho anteriormente puede plantearse así:

$$
\begin{aligned}
&\underset{u(t)}{Max}\int_{t_0}^{t_1} f(x(t),u(t),t)\,dt \\
&\text{sujeto a:}\quad x'(t)=g(t,x(t),u(t)), \qquad\qquad (1)\\
&\qquad\qquad t_0,t_1,x(t_0)\text{ fijo;}\quad x(t_1)\text{ libre}
\end{aligned}
$$

Donde $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ se suponen continuamente diferenciables en todos sus argumentos, mientras que $\boldsymbol{u(t)}$ es permitido ser continua a trozos y $\boldsymbol{x(t)}$ continuamente diferenciable.
Los problemas de Control Óptimo, pueden tener múltiples variables de estado y de control. Cada variable de estado evoluciona de acuerdo a una ecuación diferencial de primer orden. El número de controles puede ser mayor, menor o igual que el número de variables de estado.

### Transformaciones de un problema de Cálculo de Variaciones en uno de Control Óptimo:

Supongamos que se posee el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&\underset{\mathbf{x}(t)}{Max}\int_{t_0}^{t_1} f(x(t),x'(t),t)dt \\
&\text{sujeto a}\qquad x(0)=x_0
\end{aligned}
$$

y se lo desea transformar en uno de Control Óptimo. La clave consiste en definir el control como la tasa de cambio del la variable de estado de la siguiente manera:

---

[3] No negatividad, o pertenecer a un cierto conjunto de restricciones
[4] Nótese como $\boldsymbol{u(t)}$ influye directamente en el funcional (por medio de la dependencia directa del integrando de $\boldsymbol{u(t)}$, e indirectamente por medio del efecto que ésta posee sobre la variable $\boldsymbol{x(t)}$, vía la ecuación de estado, de la cual el funcional también depende.

$$\underset{u(t)}{Max}\int_{t_0}^{t_1} f(x(t),u(t),t)\,dt$$
$$\text{sujeto a:}\quad x'(t)=u(t)$$

Si bien todo problema variacional puede transformarse en uno de Control, el procedimiento inverso no siempre es posible[5] y he aquí una de las ventajas de este método. Ahora bien en la medida que la ecuación diferencial permita ser resuelta para u(t) en términos de ***x*(*t*)** e ***x'*(*t*)** y ***t***, podría llevarse a cabo dicha sustitución en el integrando. Así teniendo el siguiente problema de Control:

$$\underset{u(t)}{Max}\int_{t_0}^{t_1} f(x(t),u(t),t)\,dt$$
$$\text{sujeto a:}\quad x'(t)=g(t,x(t),u(t)),$$
$$t_0,t_1,x(t_0)\text{ fijo;}\quad x(t_1)\text{ libre}$$

En la medida que sea posible despejar ***u*** de ***g***:

$$x'(t)=g(x(t),u(t),t)\Rightarrow u(t)=g^{-1}(x'(t),x(t),t)$$

Sustituyendo en el integrando u por su igual:

$$\underset{x(t)}{Max}\int_{t_0}^{t_1} f\{x(t),g^{-1}[x'(t),x(t),t],t\}\,dt$$

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{Max}\int_{t_0}^{t_1} f(x(t),x'(t),t)dt$$

Con lo cual se tiene ahora un problema de Cálculo de Variaciones.[6]

## 3.- El principio del Máximo

El problema más simple de Control Óptimo, a diferencia del de Cálculo de Variaciones, involucra un punto terminal libre de la variable de estado. El punto de partida es el método de optimización estática con multiplicadores de Lagrange. Sin embargo a diferencia de este tipo de problemas, la restricción dada por la ecuación de estado debe cumplirse para cada instante de tiempo lo que sugiere la construcción de una función continua $\lambda(t)$ que actúe como un multiplicador intertemporal. Así:

---

[5] Esto sucede especialmente cuando las variables de control están sujetas a ciertas restricciones adicionales no contempladas en un problema de variacional.

[6] Vale aclarar que adicionalmente se requiere que las funciones ***u***(*t*) deben ser continuas en todo el horizonte de planeación [***a***, ***b***] y no solamente continuas a trozos para que dicha conversión de problema de Control a Variacional sea factible.

$$L=\int_{t_0}^{t_1} f[x(t),u(t),t)].dt+\int_{t_0}^{t_1}\{\lambda(t)(g[x(t),u(t),t]-x'(t))\}dt$$

Donde ***λ***(*t*) es el multiplicador de Lagrange asociado con la restricción de la ecuación de moviendo de (1). Debido a que existen continuas restricciones, por cada momento del tiempo en [$\boldsymbol{t_0}$, $\boldsymbol{t_1}$], entonces el multiplicador de Lagrange también será continuo. El valor de ***λ***(*t*) es llamado ***variable de coestado*** o multiplicador de Lagrange dinámico[7]. Dado que cada una de las restricciones, ***g***(**.**) – *x'*, es igual a 0, cada uno de los productos, [***g***(**.**) – *x'*] ***λ***(*t*), también son iguales a 0. Se sigue que la suma de todas estas restricciones también es igual a 0:

$$\int_{t_0}^{t_1}\{\lambda(t).(g[x(t),u(t),t]-x'(t))\}\,dt=0$$

Para encontrar las condiciones de primer orden en un problema estático, tendríamos que maximizar *L* con respecto a ***x***(*t*) y ***u***(*t*) para *t* desde 0 a T. El problema con este procedimiento es que no sabemos la derivada de ***x'***con respecto a ***x***. Para evitar este problema, podemos reescribir el lagrangeano integrando ***x'***(*t*) ***λ***(*t*) por partes para obtener:

$$L=\int_{t_0}^{t_1}(f[x(t),u(t),t]+\lambda(t).g[x(t),u(t),t]+\lambda'(t)x(t))\,dt+\lambda(t_0)x(t_0)-\lambda(t_1)x(t_1) \qquad (2)$$

Consideremos ahora una familia de controles de comparación, ***u****(*t*) + ***ah***(*t*), donde ***u**** es el control óptimo, ***h*** es una función fija por el momento y ***a*** un parámetro. Llamando **y**(*t, a*), [$t_0,t_1$] a la variable de estado generada por la ecuación de movimiento acorde al control. Asumiendo que ***y***(*t*,*a*) es una función suave en ambos argumentos. Acorde a la definición de los controles de comparación, ***a = 0*** provee el camino óptimo de x. Adicionalmente todos los controles de comparación satisfacen las condiciones iniciales:

***y***(*t*, 0) = ***x****(***t***)     ***y***($t_0$, *a*) = $\boldsymbol{x_0}$

Con las funciones ***u****, ***x**** y ***h*** fijas el valor del funcional de (1) depende únicamente de ***a***. Es decir:

$$J(a)=\int_{t_0}^{t_1}[f(t,y(t,a),u^*(t)+ah(t)]\,dt$$

Usando (2) se tiene que:

[7] Siguiendo un paralelo con el caso estático, éste multiplicadores dinámico pueden ser interpretado como un precio sombra: ***λ***(***t***) es el precio o el valor de una unidad extra de ***x*** en el momento t en unidades de la función objetivo al momento 0.

$$J(a)=\int_{t_0}^{t_1}[f(t,y(t,a),u^*(t)+ah(t))+\lambda(t)g(t,y(t,a),u^*(t)+ah(t))+$$
$$+y(t,a)\lambda'(t)]dt-\lambda(t_1)y(t_1,a)+\lambda(t_0)y(t_0,a)$$

Dado que ***u**** es el control que maximiza (1), la función ***J(a)*** alcanza dicho máximo en ***a* = 0.** En consecuencia ***J'(0)*** *= 0*, por lo que diferenciando con respecto a ***a*** y evaluando en ***a = 0*** resulta luego de agrupar términos:

$$J'(0)=\int_{t_0}^{t_1}[(f_x+\lambda g_x+\lambda')y_a+(f_u+\lambda g_u)h]\,dt-\lambda(t_1)y_a(t_1,0)=0$$

donde $f_x$, $g_x$ y $f_u$, $g_u$ denota la derivada parcial de la función ***f***, ***g*** con respecto a sus segundo y tercer argumentos respectivamente; y $y_a$ es la derivada parcial de ***y*** con respecto a su segundo argumento ***a***. Ahora dado que dicho resultado debe mantenerse para toda función de perturbación ***h*** (primer término) y dado también que el estado terminal de la variable de estado ***x*** es libre de variar (segundo término), deben darse las siguientes condiciones para anular la derivada primera de ***J***:

$$\lambda'(t)=-[f_x(t,x^*,u^*)+\lambda(t)g_x(t,x^*,u^*)]$$

$$f_u(t,x^*(t),u^*(t))+\lambda(t)g_u(t,x^*(t),u^*(t))=0$$

$$\lambda(t_1)=0$$

Para resumir, hemos demostrado que si las funciones ***u**** y ***x**** resuelven (1), entonces existe una función continuamente diferenciable λ(***t***) tal que ***u****, ***x****, **λ** simultáneamente satisfacen:

1.- la ecuación de estado

$$x'(t)=g(t,x(t),u(t)),\qquad x(t_0)=x_0$$

2.- la ecuación del multiplicador:

$$\lambda'(t)=-[f_x(t,x(t),u(t))+\lambda(t)g_x(t,x(t),u(t))],\qquad \lambda(t_1)=0$$

3.- la ecuación de optimalidad:

$$f_u(t,x(t),u(t))+\lambda(t)g_u(t,x(t),u(t))=0$$

El dispositivo algebraico para recordar o generar éstas condiciones (similar al caso de resolver un problema de optimización no lineal estático es decir, formar el lagrangeano, diferenciar, etc.) es el ***Hamiltoniano***:

$$H(t,x(t),u(t),\lambda(t)) \equiv f(t,x,u)+\lambda g(t,x,u)$$

ya que del mismo pueden obtenerse las condiciones de necesarias para resolver (1)

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0$$
$$-\frac{\partial H}{\partial x}=\lambda'$$
$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=x'$$

Las condiciones anteriores son denominadas el "***Principio de Maximo***" y su razón de ser obedecen a que en su versión más general (no abordadas en estas notas) las variables de control suelen estar sujetas a un conjunto de restricciones adicionales (desigualdad, igualdad etc., que en general pueden exprearse por $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\Omega}$) por lo que las condiciones anteriores del Hamiltoniano suelen escribirse así:

$$\underset{u\in\Omega}{Max}\, H(x,u,\lambda,t)$$
$$-\frac{\partial H}{\partial x}=\lambda'$$
$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=x'$$

De esta manera el procedimiento para resolver un problema de Control es la siguiente:

1.- Optimizar el Hamiltoniano con respecto a u obteniendo los controles óptimos en función de $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{x}$:

$$\underset{u\in\Omega}{Max}\, H(x,u,\lambda,t) \Rightarrow u^*(x,\lambda,t)$$

2.- Substituir el valor del control $\boldsymbol{u}$ en el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de modo tal que solo queden dos variables a resolver: $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{\lambda}$. Deben usarse las condiciones iniciales y terminales (transversalidad):

$$\begin{cases} \lambda'(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}\left(x,u^*(t,x,\lambda),\lambda\right) \\ x'(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}\left(x,u^*(t,x,\lambda),\lambda\right) \\ x(t_0)=x_0, \qquad \lambda(t_1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{cases}$$

3.- Con los valores óptimos de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ regresar a las soluciones de $\boldsymbol{u}$ halladas en el paso 1 para obtener los valores óptimos definitivos de los controles

$$u^*(t) = u^*\left(t, x^*(t), \lambda(t)\right)$$

En general resolver de manera analítica el paso 2 suele ser difícil y muchas veces imposible por lo que suele optarse por análisis grafico-cualitativo en la medida que el Hamiltoniano sea autónomo (que no dependa explícitamente del tiempo) pues esto habilita a construir diagramas de fases.

El principio del máximo también es válido para el caso de múltiples controles y múltiples variables de estado. Así en el caso de *n* variables de control y *m* de estado se tiene:

$$\begin{aligned}
&\underset{u(t)}{Max} \int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\, dt \\
&\text{sujeto a:} \quad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\
&\qquad\qquad t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0) \text{ fijo;} \quad \mathbf{x}(t_1) \text{ libre}
\end{aligned}$$

Donde:

$\mathbf{x}(t) = [\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_m(t)]$
$\mathbf{u}(t) = [\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t)]$
$\mathbf{g}(t) = [g_1(t), g_2(t), \ldots, g_m(t)]$
$\mathbf{x}(t_0) = [\boldsymbol{x}_1(t_0), \boldsymbol{x}_2(t_0), \ldots, \boldsymbol{x}_m(t_0)]$

Con lo que las condiciones necesarias para resolver éste problema son ahora:

$$\begin{aligned}
&\underset{\mathbf{u}\in\boldsymbol{\Omega}}{Max}\, H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \\
&-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda}' \\
&\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{x}'
\end{aligned}$$

Siendo el Hamiltoniano:

$$H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \equiv f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Donde $()^T$ denota el operador transponer de modo que resulte un producto interno entre el vector de lambdas y el vector de restricciones.
Nótese como ahora existen *n* controles, *m* estados y *m* multiplicadores y ahora el sistema de ecuaciones diferenciales que arroja el Principio del máximo contiene *2m* variables.

## 4.- Condiciones de Segundo Orden

Los siguientes son una serie de teoremas que garantizan que bajo ciertas situaciones las condiciones del principio del Máximo aseguran la resolución del problema de Control en el sentido que las mismas dejan de ser sólo necesarias para ser también suficientes

**Teorema de Mangasarian**: Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son cóncavas en $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{u}$ en el intervalo $[\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t_1}]$ y si $\boldsymbol{\lambda(t)} \geq 0$ en $[\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t_1}]$, entonces las condiciones del Principio del Máximo resultan también ser suficientes para resolver el Problema de control. Alternativamente sucede lo mismo en el caso que $\boldsymbol{f}$ sea cóncava y $\boldsymbol{g}$ convexa en $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{\lambda(t)} \leq 0$ en $[\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t_1}]$.

Existe además una condición suficiente más débil que la anterior pero se basa en la definición de Hamiltoniano Maximizado y que es la siguiente:

Sea $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ el valor del control que maximiza el Hamiltoniano,

$$H(t,x,u,\lambda) = f(x,u,t) + \lambda g(t,x,u)$$

donde la notación $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ refleja la dependencia del valor maximizado de $\boldsymbol{u}$ con respecto a los parámetros del problema, el ***Hamiltoniano Maximizado*** se define ahora como:

$$\begin{aligned} H^0(x,\lambda,t) &= \max_u H(x,u,\lambda,t) \\ &= f(x,U(t,x,\lambda),t) + \lambda g(x,U(t,x,\lambda),t) \end{aligned}$$

**Teorema de Arrow**: Si $\boldsymbol{H^0}$ $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ es una función cóncava de $\boldsymbol{x}$ para un $\boldsymbol{\lambda}$ dado en el intervalo $[\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t_1}]$, entonces las condiciones del principio de Máximo resultan ser suficientes para el Problema de Control.

## 5.- Condiciones de Transversalidad

Existen tres variantes[8] para este problema general en donde solo se dan las condiciones iniciales mientras que las terminales pueden tomar algunos de los siguientes casos:

a) **Punto terminal fijo:** Aquí la variable de estado esta forzada a terminar en un valor específico al fin del horizonte de planeación

$$x(t_1) = x_1, \qquad t_1, x_1 \text{ fijos}$$

[8] El lector interesado en ver condiciones de transversalidad mas generales o combinación de las mismas en el mismo problema puede consultar Kamien-Schwartz [páginas 143-150]. Las demostraciones de las condiciones aquí expuestas, como las de las más generales, pueden encontrarse en dicho texto.

b) **Línea terminal Horizontal:** Aquí la variable de estado esta forzada a terminar en un valor específico pero el fin del horizonte de planeación es libre de variar arbitrariamente

$$x(t_1) = x_1, \qquad t_1, \text{libre}$$

c) **Superficie Terminal:** Aquí la variable de estado como el tiempo terminal son libres de variar simultáneamente pero no de una manera libre sino que están ligados por una relación funcional que las restringe.

$$x(t_1) = \varphi(t_1)$$

De acuerdo al problema en cuestión para la optimalidad del mismo deben verificarse ciertas condiciones acerca de cómo las variables del problema "***atraviesan***" el estado final del sistema. En estos casos la condición de transversalidad planteada anteriormente debe ser sustituida por:

a) **Punto Terminal Fijo**:

$$x(t_1) = x_1$$

b) **Línea Terminal Horizontal:**

$$[H]_{t=t_1} = 0$$

c) **Superficie Terminal**

$$[H - \lambda\varphi']_{t=t_1} = 0$$

Además si el tiempo terminal es fijo y todas las variables están truncadas verticalmente, entonces las condiciones de transversalidad son:

$$\lambda(t_1) \geq 0, \quad x_{t_1} \geq x_{\min}, \qquad (x_{t_1} - x_{\min})\lambda(t_1) = 0$$

Finalmente para un problema con tiempo terminal máximo permisible las condiciones de transversalidad serán:

$$[H]_{t=t_1} \geq 0 \quad t_1 \leq t_{\max} \quad (t_1 - t_{\max})[H]_{t=t_1} = 0$$

## 6.- Horizonte Infinito

En donde ahora se trata de una integral impropia pues uno de sus límites es infinito. Como primer requisito se necesita que la misma sea convergente.

$$\underset{u(t)}{Max}\int_{t_0}^{\infty} f(x(t),u(t),t)\,dt$$
$$\text{sujeto a:}\quad x'(t)=g(t,x(t),u(t)),$$
$$t_0,t_1,x(t_0)\ \text{fijo};\quad \lim_{t\to\infty} x(t_1)\ \text{libre}$$

Para abordar este problema se modifican las condiciones de transversalidad del siguiente modo:

$$\lim_{t\to\infty} H=0$$

Si además se permitiese a la variable $\boldsymbol{x(t)}$ variar libremente en el límite a infinito se requerirá agregar esta nueva condición de transversalidad[9]:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)=0$$

Similarmente en el caso de que la variable de estado estuviese sujeta a un valor mínimo la condición será:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)\geq 0,\quad \lim_{t\to\infty} \lambda(t)[x(t)-y_{\min}]=0$$

## 7.- Hamiltoniano de Valor Corriente

Dadas las ventajas en materia de resolución y la posibilidad de usar el análisis grafico-cualitativo cuando se presenta un integrando y una ecuación de movimiento autónoma (independiente del tiempo de manera explícita), uno siempre desea tratar con un problema autónomo. A su vez, en muchas ocasiones sucede que la única aparición explicita del tiempo es a través de un factor de descuento continuo por lo que se ha tratado de eliminar el tiempo de una manera muy sencilla como se expone a continuación.

En tales circunstancias, aparición del tiempo en forma explícita únicamente en el factor de descuento continuo, se intenta transformar el problema original en un problema alternativo de carácter puramente autónomo que preserva la esencia del problema original y permite su recuperación. Esta transformación da origen a lo que se denomina "***Hamiltoniano de Valor Corriente***" que se expone a continuación.

La función integrando ***f*** a veces contiene un factor de descuento *fd* definido como

[9] Vale aclarar que dicha condición de transversalidad ha generado cierta controversia entre los estudiosos de tales problemas. Sin embargo, en la medida que el integrando del funcional objetivo (***f(.)***) este actualizado por un factor de descuento, dicha condición es indudablemente necesaria. La duda se plantea cuando no existe tal factor de descuento.

$$fd = e^{-\rho t}$$

Tal función puede ser expresada como $\boldsymbol{f}(t,y,u) = \boldsymbol{G}(t,y,u)\, fd$, entonces el problema de control óptimo es

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{u}(t)}{Max} \int_{t_0}^{t_1} G(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) e^{-\rho t} dt \\ &\quad s.t. \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ &\qquad\qquad\quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}, \quad \mathbf{x}(t_1) \text{ libre}, \quad \mathbf{x_0}, t_1, \text{ dados} \\ &\qquad\qquad\quad \mathbf{u}(t) \in \Omega \end{aligned}$$

Por definición, el Hamiltoniano adopta la forma

$$H(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = G(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) e^{-\rho t} + \boldsymbol{\lambda}(t)\, \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$$

Ahora bien, el Principio del Máximo exige la diferenciación de ***H*** con respecto a **u** y ***x***, sumado a que la presencia del factor de descuento añade complejidad, un artificio conveniente es definir un nuevo Hamiltoniano librado de dicho factor, llamado "***Hamiltoniano de valor corriente"*** (***$H_c$***).
Este nuevo concepto del ***$H_c$*** debe acompañarse con el "multiplicador de valor corriente" ***m***(***t***) definido de la siguiente manera:

$$\mathbf{m}(t) = \boldsymbol{\lambda}(t) e^{\rho t} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{m}(t) e^{-\rho t}$$

El ***$H_c$***. puede ser escrito como

$$H_C \equiv H e^{\rho t} = G(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{m}(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Lo que implica que

$$H \equiv H_C e^{-\rho t}$$

**El principio del Máximo revisado**
Al elegir trabajar con ***$H_c$*** en vez de ***H***, deben revisarse todas las condiciones obtenidas anteriormente.
La 1ª condición del Principio del Máximo consistente en maximizar ***H*** respecto de ***u*** para cada momento del tiempo esencialmente no cambia, solo sustituyendo ***H*** por ***$H_c$*** ya que el término exponencial es constante para cualquier ***t*** dado comprobándose la maximización en el mismo **u** particular.
La condición revisada se simplifica a

$$\underset{\mathbf{u} \in \Omega}{Max}\, H_C, \qquad \forall\, t \in [t_0, t_1]$$

Dado que

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \frac{\partial H_c}{\partial \mathbf{m}}$$

la nueva ecuación de movimiento para la variable de estado original cambia por

$$\mathbf{x'} = \frac{\partial H_c}{\partial \mathbf{m}}$$

La nueva ecuación de movimiento para la variable

$$\dot{\mathbf{m}} = -\frac{\partial H_C}{\partial \mathbf{x}} + \rho \mathbf{m}$$

Las condiciones de transversalidad revisadas para el caso de una línea vertical terminal son:

$$\mathbf{m}(t_1)e^{-\rho t_1} = \mathbf{0}$$

Resumiendo el Principio del Máximo revisado establece las siguientes condiciones necesarias en función del Hamiltoniano de Valor Corriente.

$$\begin{cases} \underset{\mathbf{u} \in \Omega}{Max}\, H_C = e^{\rho t} H \\ \mathbf{m}'(t) = -\dfrac{\partial H_C}{\partial \mathbf{x}} + \rho \mathbf{m} \\ \mathbf{x'}(t) = \dfrac{\partial H_c}{\partial \mathbf{m}} \end{cases}$$

Junto a las siguientes condiciones iniciales y de transversalidad respectivamente:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_1}$$
$$\mathbf{m}(t_1)e^{-\rho t_1} = \mathbf{0}$$

## 8.- Control optimo con restricciones

Al igual que en el caso de Calculo de variaciones, aquí también pueden presentarse problemas de control optimo con restricciones. De esta manera el problema puede formularse como sigue:

$$
\begin{aligned}
& \underset{\mathbf{u}(t)}{Max} \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \\
& s.t. \quad \mathbf{x}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\
& \qquad \mathbf{b} = \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\
& \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}, \qquad \mathbf{y}(T) \text{ libre}, \qquad x_0, t_1 \text{ dados} \\
& \mathbf{u}(t) \in \ \Omega
\end{aligned}
$$

donde **b** es un vector de constantes conocidas. Para su resolución se requiere formular una nueva función lagrangeana, con tantos nuevos multiplicadores como componentes tenga el vector de restricciones **b,** de la siguiente manera:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, t) = H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\theta}(t)[\mathbf{b} - \mathbf{B}(\mathbf{x}, u, t)]$$

y las condiciones de optimalidad ahora serán

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \ \mathbf{0} \\
& \boldsymbol{\lambda}'(t) = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \\
& \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \ \mathbf{b} - \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{0} \\
& \mathbf{x}'(t) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\
& \boldsymbol{\lambda}(t_1) = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

De igual modo también puede definirse una función lagrangeana de valor corriente modificando los multiplicadores $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\theta}$ multiplicándolos por $e^{\rho t}$ y aplicar el principio de máximo revisado igual que en el caso anterior en donde solo se observaran diferencias en

$$\mathbf{m}'(t) = -\frac{\partial L_C}{\partial \mathbf{y}} + \rho \mathbf{m}$$

ya que el resto de las condiciones serán:

$$
\begin{aligned}
& \underset{\mathbf{u} \in \Omega}{Max} \, L_C \\
& \mathbf{m}'(t) = -\frac{\partial L_c}{\partial \mathbf{x}} + \rho \mathbf{m} \\
& \frac{\partial L_c}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \ \mathbf{b} - \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{0} \\
& \mathbf{x}'(t) = \frac{\partial L_c}{\partial \mathbf{m}}
\end{aligned}
$$

## 9- Ejemplos y Aplicaciones:

Básicamente en materia de ejemplos y aplicaciones del Cálculo de Variaciones, podemos destacar dos tipos de los mismos:

**Ejercicios de carácter cuantitativo**: que partiendo de datos explícitos en particular buscan resolver un problema concreto, determinado y específico

**Ejercicios de carácter cualitativo**: éstos en base a datos generales en donde no se especifican ni se detallan los datos del problema de manera explicita si no simplemente se confieren ciertas caracteres generales, comunes a un amplio rango de problemas parecidos, buscan encontrar patrones de solución comunes a todos ellos. En economía es ampliamente usado este tipo de aplicaciones en donde por ejemplo el investigador no persigue determinar la trayectoria óptima de consumo para un agente determinado que posee unas preferencias explicitas y particulares, si no que conociendo ciertas características en común de todos los agentes, se trata de determinar los patrones de conducta comunes a todos ellos en su trayectoria óptima. Esto es de gran importancia pues simplemente con saber ciertas cualidades de las funciones de Utilidad o producción de los agentes y firmas, es posible en muchos casos develar el esquema común de comportamiento de los agentes sin necesidad de conocer con exactitud tales funciones.

A continuación mostramos ejemplos de cada una de ésas clases de problemas:

**Ejemplo 1**

Considérese el siguiente problema de optimización Dinámica:

$$\max \int_0^1 (x+u)dt \qquad (I)$$

$$\text{sujeto a:} \quad x' = 1-u^2, \qquad x(0)=1. \qquad (II)$$

De la Función Hamiltoniana:

$$H(t,x,u,\lambda) = x+u+\lambda(1-u^2),$$

las condiciones necesarias son:

$$\begin{aligned} &H_u = 1-2\lambda u = 0, && H_{uu} = -2\lambda \leq 0, && (III) \\ &\lambda' = -H_x = -1, && \lambda(1) = 0, && (IV) \\ &x' = 1+u^2, && x(0) = 1. && \end{aligned}$$

Resolviendo (IV) queda:

$$\lambda = 1 - t.$$

Luego

$H_{uu} = -2(1-t) \leq 0,$ para $0 \leq t \leq 1$. También por (III),

$$u = 1/2\lambda = 1/2(1-t)$$

Sustituyendo ésta última expresión en (II) resulta:

$$x' = 1 - 1/4(1-t^2), \qquad x(0) = 1.$$

Integrando y usando las condiciones de contorno resulta la solución final:

$$\begin{aligned} &x(t) = t - 1/4(1-t) + 5/4, \\ &y(t) = 1 - t, \\ &u(t) = 1/2(1-t). \end{aligned}$$

**Aplicaciones a Economía:**

Consideremos una Economía cerrada en la que solo existe un único bien, de tal forma que la producción final se puede dedicar tanto al consumo como a la inversión. El capital *K* se deprecia a una tasa constante δ y la población crece a una tasa *n*. Toda la población trabaja, de manera que la población y el trabajo *L* son idénticos. El supuesto de economía cerrada quiere decir que no se puede pedir prestado de mercados extranjeros, por lo que el ahorro debe ser igual a la inversión (en una economía abierta, la diferencia entre ahorro e inversión es igual a la balanza por cuenta corriente.). El ahorro es igual a la producción total, ***Y=F(K,L)***, menos el consumo, *C* (en este modelo tampoco hay gobierno por lo que no hay impuestos ni ahorro público). La inversión bruta es igual a la inversión neta, $\dot{K}$, mas la depreciación, δK. Tenemos pues que la restricción de la economía cerrada requiere:

$$\dot{K}_t = F(K_t, L_t) - C_t - \delta K_t$$

La que expresada en términos per-capita resulta[10]:

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k$$

Los consumidores maximizan su utilidad dada por el funcional:

---

[10] Suponiendo que la función de producción es homogénea de grado uno, se dividen ambos miembros por L con lo que resulta la expresión allí expuesta.

$$V = \int_0^\infty u(c(t))L(t)e^{-\rho t}dt$$

asumiendo que ***u'***(c)>0 y ***u''***(c)<0 y que ***u***(c) satisface las condiciones de Inada, ***u'***(c) $\rightarrow \infty$ cuando c $\rightarrow 0$ y ***u'***(c) $\rightarrow 0$ cuando c $\rightarrow \infty$ . Teniendo en cuenta que *L* crece a una tasa *n* positiva y con una adecuada elección de la unidad (*L* en cero es igual a uno), es posible presentar el problema de la siguiente manera:

$$V = \int_0^\infty u(c(t))e^{(n-\rho)t}dt$$

Se asume ρ > *n* para acotar la función de utilidad V cuando c es constante.
De esta manera los agentes resolverían este problema para hallar su consumo óptimo:

$$\begin{aligned} V &= \max_{c(t)} \int_0^\infty u(c(t))e^{(n-\rho)t}dt \\ st: \ \dot{k} &= f(k) - c - (\delta + n)k \end{aligned}$$

Construyendo el Hamiltoniano respectivo, resulta:

$$H(.) = e^{-(\rho-n)t}u(c) + \lambda(f(k) - c - (\delta + n)k)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} &H_c = 0 \leftrightarrow e^{-(\rho-n)t}u'(c) - \lambda = 0 && (a) \\ &H_k = -\dot{\lambda} \leftrightarrow \dot{\lambda} = \lambda(f'(k) - n - \delta) && (b) \\ &\lim_{t\to\infty} k_t \lambda_t = 0 && (c) \end{aligned}$$

Tomando logaritmos y derivadas de (a) y substituyendo en (b) obtenemos:

$$f'(k) - \delta = \rho - \left[\frac{u''(c)c}{u'(c)}\right]\frac{\dot{c}}{c}$$

El lado izquierdo de la condición de optimalidad de los agentes constituye la ganancia por posponer consumo presente hacia el futuro (es la productividad marginal neta del capital) y el lado derecho es el costo de posponer tal consumo ya que *ρ* representa el costo por consumir en el futuro y el resto de la expresión en el paréntesis es una medida de la perdida de utilidad por consumir de una manera no constante en el tiempo, costo que es penalizado por la naturaleza cóncava de la función de utilidad (a mayor concavidad mayor es la perdida de utilidad por no consumir de manera estable a lo largo del tiempo). Así, la condición de optimalidad sugiere que la trayectoria maximizadota de utilidad se consigue cuando se logran compensar beneficios con costos de intercambiar consumo presente por futuro.

Obsérvese como la expresión anterior junto con la condición de transversalidad (c), determinan completamente la dinámica del capital y el consumo del modelo. Nótese además como esta condición es independiente de la función de Utilidad y producción de los agentes, por lo tanto la condición anterior es un patrón verificable para todo agente de la economía.

## 10.- Implementaciones en Maple y Mathematica

### En Maple:

Aquí se pretende diseñar una rutina de programación que sea lo suficientemente sencilla de usar y que sea capaz de tratar la mayor gama posible de problemas. Para ello se expone a continuación dos programas escritos en Maple que permite resolver tales problemas descrito en secciones precedentes.

# Control Óptimo: Caso General

```
restart:
Hamilton := proc(f,g,u,x,l,ICs) local
a,b,H,eq1,eq2,eq_1,eq_2,eqd_1,eqd_2,control,sys:

H:= f+l[1]*g:
a:=libreIII(H,u):
eq1:=eval(diff(H,l),a[1]):
eq2:=eval(diff(-H,x),a[1]):
eq_1:= eval(eq1,[x[1]=x[1](t),l[1]=l[1](t)]):
eq_2:= eval(eq2,[x[1]=x[1](t),l[1]=l[1](t)]):
eqd_1:= diff(x[1](t),t)=eq_1:
eqd_2:= diff(l[1](t),t)=eq_2:
sys:= {eqd_1,eqd_2}:
b:=dsolve(sys union ICs,{x[1](t),l[1](t)}):
control:=eval(eval(a[1],[x[1]=x[1](t),l[1]=l[1](t)]),b):
control union b;
end:
```

## Sintaxis

*Hamilton(F(u, x, t), g(u ,x, t),[x],[y],[l]);*

donde:
**F(u,x.t)** es el integrando
**g(u,x.t)** la restricción del estado
**u:** la variable de control
**x:** la variable de estado del sistema
**t**: tiempo

## Control Óptimo en tiempo Terminal Fijo

```
> restart:
HamiltonII := proc(f,g,u,x,l,ICs) local
a,b,H,eq1,eq2,eq_1,eq_2,eqd_1,eqd_2,control,sys:

H:= f+l[1]*g:
a:=libreIII(H,u):
eq1:=eval(diff(H,l),a[1]):
eq2:=eval(diff(-H,x),a[1]):
eq_1:= eval(eq1,[x[1]=x[1](t),l[1]=l[1](t)]):
eq_2:= eval(eq2,[x[1]=x[1](t),l[1]=l[1](t)]):
eqd_1:= diff(x[1](t),t)=eq_1:
eqd_2:= diff(l[1](t),t)=eq_2:
sys:= {eqd_1,eqd_2}:
b:=dsolve(sys  union ICs,{x[1](t),l[1](t)}):
control:=eval(eval(a[1],[x[1]=x[1](t),l[1]=l[1](t)]),b):
control union b;
end:
```

## Sintaxis

***HamiltonII(F(u, x, t), g(u ,x, t),[x],[y],[l],{x(0=a),x(T)=b });***

donde:
**F(u,x.t)** es el integrando
**g(u,x.t)** la restricción del estado
**u:** la variable de control
**x:** la variable de estado del sistema
**t**: tiempo
**a**: el valor del estado inicial del sistema
**b**: el valor del estado final del sistema en el periodo T

Supongamos que deseamos resolver el siguiente problema de Control Óptimo con Maple:

$$\underset{u(t)}{Max} \int_0^1 u(t)^2 \, dt$$

$$\text{sujeto a:} \quad x'(t) = x(t) + u(t),$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 0.$$

Los comandos serán:

**Hamilton(u^2,x+u,[u],[x],[l],{x(0)=1,x(1)=0});**

$$\left\{ l(t) = 4 \frac{e^{(-t)} e}{e - e^{(-1)}}, x(t) = -\frac{e\, e^t}{e - e^{(-1)}} + \frac{e^{(-t)} e}{e - e^{(-1)}} + e^t, u = -2 \frac{e^{(-t)} e}{e - e^{(-1)}} \right\}$$

Si a su vez no queremos especificar las condiciones iniciales terminales como fijas, se puede utilizar el siguiente comando para resolverlo en forma general sin especificar las constantes de integración dadas por las respectivas condiciones de transversalidad apropiadas a cada caso:

**HamiltonII(u^2,x+u,[u],[x],[l]);**

$$\{l(t) = e^{(-t)}\,\_C1,\ x(t) = -\frac{1}{4}\_C1\, e^{t} + \frac{1}{4} e^{(-t)}\,\_C1 + e^{t}\,\_C2,\ u = -\frac{1}{2} e^{(-t)}\,\_C1\}$$

Con cuyos resultados y las condiciones de transversalidad apropiadas al problema en particular pueden resolverse un sistema de ecuaciones comunes por medio del comando **Solve**

# Control Óptimo con Mathematica

A similitud del apartado anterior, se procede aquí a la implementación del Principio del Máximo en Mathematica. Se mostrarán dos programas: el primero el caso general en donde no se hace mención a las condiciones de transversalidad y el segundo en donde se trata el caso de tiempo terminal fijo.

# Caso General

```
Unprotect[Hamilton];
```

```
Hamilton[H_, u_List, y_List, l_List, t_] :=
 Module[{r, n, A, B, F, G, K, J, KK},
  r = Length[u];
  n = Length[y];

  a = Table[∂u[[i]] H, {i, 1, r}];
  aa = Table[0, {i, 1, r}];
  A = Solve[a == aa, u]; s = Length[A];
   B = Table[∂l[[i]] H == ∂t y[[i]],
    {i, 1, n}];
   F = Table[-∂y[[i]] H == ∂t l[[i]],
    {i, 1, n}];
    G = Table[ReplaceAll[B, A[[i]]],
    {i, 1, s}];
    K = Table[ReplaceAll[F, A[[i]]],
    {i, 1, s}];
       J =
   Table[DSolve[Join[G[[i]], K[[i]]],
     Join[y, l], t], {i, 1, s}];
  KK =
   Table[Simplify[
     ReplaceAll[A[[i]], J[[i]]]],
    {i, 1, s}];
  Table[Join[KK[[i]], J[[i]]], {i, 1, s}]]
```

De esta manera se crea un nuevo comando llamado **Hamilton** que devuelve las trayectorias óptimas de las variables de control, estado y coestado sin especificar las condiciones de transversalidad del problema por lo que las soluciones contendrán las constantes de integración pertinentes al problema en cuestión las que luego podrán ser obtenidas mediante la especificación de las condiciones de transversalidad apropiadas al problema en tratamiento con ayuda del comando **Solve.**

La sintaxis de **Hamilton** se expone a continuación:

# Sintaxis

***Hamilton[H(u[t], x[t], l[t], t), {u[t]},{ x[t]}, { l[t]}, t,];***

donde:

***H(u[t], x[t], l[t], t*** es la función Hamiltoniana
**u[t]:** la variable de control
**x[t]:** la variable de estado
**l[t]:** Multilplicador de lagrange dinámico
**t**: tiempo

**Ejemplo 1**

```
Hamilton[-(1 + (u)^2)^(1/2) + l[x] * u,
 {u}, {y[x]}, {l[x]}, x]
```

$$\left\{\left\{\left\{u \to -\frac{i\, C[2]}{\sqrt{-1 + C[2]^2}}\right\},\ \left\{l[x] \to C[2],\ y[x] \to C[1] - \frac{i\, x\, C[2]}{\sqrt{-1 + C[2]^2}}\right\}\right\},\ \left\{\left\{u \to \frac{i\, C[2]}{\sqrt{-1 + C[2]^2}}\right\},\ \left\{l[x] \to C[2],\ y[x] \to C[1] + \frac{i\, x\, C[2]}{\sqrt{-1 + C[2]^2}}\right\}\right\}\right\}$$

# Tiempo Terminal Fijo

Ahora se muestra el código de programación que resuelve de manera completa el problema de Control en caso de tiempo terminal fijo:

```
Clear[r, n, s1, s2, a, aa, A, B, K, F,
 G, J, KK]

Unprotect[HamiltonTF];
```

```
HamiltonTF[H_, u_List, y_List, l_List,
  t_, p_List, q_List, m_List] :=
 Module[{r, n, s1, s2, A, B, F, G, K, J,
   KK},
  r = Length[u];
  n = Length[y];
  s1 = ReplaceAll[y, t → p[[1]]];
  s2 = ReplaceAll[y, t → p[[2]]];

  a = Table[∂u[[i]] H, {i, 1, r}];
  aa = Table[0, {i, 1, r}];
  A = Solve[a == aa, u]; s = Length[A];
   B = Table[∂l[[i]] H == ∂t y[[i]],
    {i, 1, n}];
   F = Table[-∂y[[i]] H == ∂t l[[i]],
    {i, 1, n}];
    G = Table[ReplaceAll[B, A[[i]]],
    {i, 1, s}];
    K = Table[ReplaceAll[F, A[[i]]],
    {i, 1, s}];
      J =
   Table[
    DSolve[Join[G[[i]], K[[i]],
      Table[s1[[i]] == q[[i]], {i, 1, n}],
      Table[s2[[i]] == m[[i]], {i, 1, n}]],
     Join[y, l], t], {i, 1, s}];
  KK =
   Table[Simplify[
     ReplaceAll[A[[i]], J[[i]]]],
    {i, 1, s}];
  Table[Join[KK[[i]], J[[i]]], {i, 1, s}]]
```

Como se observa con las rutinas anteriores se crea un nuevo comando llamado **HamiltonTF** cuya sintaxis se detalla seguidamente:

***HamiltonTF[H(u[t], x[t], l[t], t), {u[t]},{ x[t]}, { l[t]}, t, {0,T}, {x[0]}, {x[T]}];***

donde:

***H(u[t], x[t], l[t], t*** es la función Hamiltoniana

**u[t]:** la variable de control
**x[t]:** la variable de estado
**l[t]:** Multilplicador de lagrange dinámico
**t**: tiempo
***{0,T}:*** Intervalo de tiempo
***{x[0}, {x[T]}:*** Condiciones Iniciales y terminales de la variable de estado en 0 y T respectivamente

**Ejemplo 2**

Supongamos que se desea resolver el siguiente problema con tiempo terminal fijo:

$$\underset{u(t)}{Max} \int_0^4 u(t)^2\, dt$$
$$\text{sujeto a:} \quad x'(t) = x(t) + u(t),$$
$$x(0) = 5, \quad x(4) = 7.$$

```
HamiltonTF[-(1 + (u[x])^2)^(1/2) + l[x] * u[x], {u[x]}, {y[x]}, {l[x]}, x, {0, 4}, {7},
 {5}]
```

$$\left\{u[x] \to -\frac{1}{2},\ l[x] \to \frac{1}{\sqrt{5}},\ y[x] \to 7 - \frac{x}{2}\right\}$$

**Observación:** Si bien todos los ejemplos mostrados fueron tratados para una sola variable de control y estado, la generalidad de los códigos de programación permite la utilización de *n* variables de control y *m* de estado.

## BIBLIOGRAFÍA


**Bellman, Richard** (1957): *"Dynamic Programing"* Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

**Cerdá Tena, Emilio** (2001): *Optimización Dinamica.* Prentice Hall. España.

**Alpha Chiang**. "Elements of Dynamic Optimization", McGraw-Hill, 1992

**Intriligator, Michael D** (1971)**.** "*Mathematical optimization and economic theory*". Prentice-Hall.

**Morton I. Kamien and Nancy L. Schwartz,** (1991),*Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management,* (2nd ed.) by North Holland: New York.

**Oviedo, Jorge Mauricio**, 2006: "*Notas de Optimización Dinámica: Calculo de Variaciones*" Documentos de trabajo Nº 7. Departamento de Estadística y Matemática. Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Córdoba.

**Stokey, Nancy and Lucas, Robert** (1987): *"Recursive Methods in Economic Dynamic"* Harvard University Press.