Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Ciencias Económicas
Departamento de Economía y Finanzas

Ejercicios Avanzados de Microeconomía

Guía Complementaria de Estudio

Lic. Jorge Mauricio Oviedo

2006

Introducción

La presente Guía de Estudio de ninguna manera intenta suplir las actuales Guías de estudio existentes en los cursos de contenidos Microeconómicos, si no que por el contrario, trata de complementarlas. Para ello el objetivo principal de esta guía, ha sido lograr una profunda e íntima conexión entre los contenidos algebraicos, conceptuales y geométricos.

Es bien sabido, que los lenguajes algebraicos son sumamente precisos pero poco intuitivos e interpretativos a nivel conceptual. Por otro lado, los lenguajes gráficos y conceptuales son altamente intuitivos y explicativos a la hora de abordar un problema en cuestión pero carecen de precisión y exactitud transformándose así en inútiles ante problemas más complejos. Adicionalmente el estilo gráfico-conceptual permite dar respuestas de una manera muy rápida a través de las asociaciones e intuiciones automáticas que el individuo desarrolla, en comparación al tiempo que demanda resolver un problema de manera precisa bajo la luz de un enfoque puramente analítico.

Es por eso que en esta Guía de Estudios pretendemos complementar todos estos enfoques haciendo que las gráficas y las intuiciones conceptuales adquieran un carácter sumamente preciso mediante el aporte de precisión que ofrecen las técnicas algebraicas. A su vez pretendemos que las técnicas analíticas pierdan su frialdad y su automaticismo mediante la calidez y practicidad que aportan las intuiciones gráficas y conceptuales. Se pretende así que el alumno cada vez que visualice una gráfica sea capaz de condimentarla con absoluta precisión algebraica, y cada vez que se enfrente a una fórmula, a una ecuación o una técnica analítica sea capaz de entender hasta el mas minucioso detalle interpretativo detrás de cada una de ellas, que sepa entender porque opera como opera, que sepa darle color y sentido a cada operación algebraica que realice. Una vez que el alumno logra complementar todos éstos enfoques está completamente preparado para analizar e interpretar los hechos de la realidad, ya que de esta manera ha logrado romper las barreras existentes entre sus intuiciones, entre sus visualizaciones geométricas y entre las leyes de la lógica matemática. Solo mediante ésta conexión el alumno esta completamente seguro que es capaz de entender y utilizar los conceptos adquiridos en estos cursos.

Con ese primer fin, cada ejercicio, cada problema de ésta guía se solicita que se lo resuelva por todos los métodos descriptos anteriormente. Cuando el alumno lo hace, se asombra al vislumbrar que éstos tres enfoques (Conceptual, Geométrico y Algebraico) dicen exactamente lo mismo. Aprende a valorar las repercusiones que tienen un paso algebraico, una técnica matemática, sobre la realidad conceptual o geométrica que está analizando.

Como segundo objetivo, se pretende borrar las barreras existentes entre Teoría y Aplicaciones. Justamente este triple enfoque permite desvanecer esos muros ya que el alumno observa una íntima y estrecha conexión entre cada concepto teórico, entre cada definición, entre cada nueva teoría y las aplicaciones en ejercicios de carácter algebraico.

De ésta manera el alumno que trabaje con la metodología de esta guía, no deberá nunca más estudiar las Materias de Microeconomía en dos partes: Parte Teórica y Parte Práctica. De una manera asombrada el alumno reflexiona que tras haber realizado los problemas de ésta guía con la metodología aquí expuesta, no requiere estudiar de manera adicional casi ningún otro concepto aprendidos en las clases teóricas ya que sin darse cuenta mediante la resolución de cada ejercicio a aprendido en detalle la Teoría en su completitud gracias al Triple enfoque de ésta guía y a la selección de tópicos que intentan encontrar un ejercicio algebraico a casi todo tema visto en las clases de Teoría.

En ediciones posteriores se intentará avanzar con mayor completitud a fin de lograr ejercicios algebraicos de absolutamente todos los conceptos de las clases teóricas.

Esta guía al tener un fuerte hincapié en técnicas algebraicas (Calculo Diferencial e Integral, Optimización, etc.) es de carácter avanzado para los cursos introductorios y de nivel intermedio para los cursos superiores. No se recomienda su uso en Cursos de Nivel Introductorio a menos que el Docente tenga la suficiente habilidad pedagógica para transmitir el uso de tales técnicas de una manera cálida y amigable, haciendo que éstos tópicos resulten agradables, cargados de motivación y entusiasmo para los alumnos no muy familiarizados con éstas técnicas, o para aquellos que si bien las conocen (pues las han adquiridos en cursos anteriores) no están acostumbrados a aplicarlas fuera de conductas automaticistas y mecánicas, y darle el valor y la utilidad que se merecen.

0.- Preliminares Matemáticos

1.- *Repase los siguientes conceptos y significados matemáticos sin descuidar sus interpretaciones geométricas.*

i. **Funciones**: Concepto
ii. **Funciones bivariadas**: Algebra, Geometría, interpretación
iii. **Curvas de Nivel**: Concepto matemático, interpretación geométrica
iv. **Derivadas**, Derivadas Parciales
v. **Optimización en una variable**: Condición de Primer y Segundo Orden. Aspectos Geométricos
vi. **Optimización dos variables**: Condiciones de Primer y segundo Orden. Aspectos Geométricos
vii. **Optimización con Restricciones de Igualdad**: Multiplicadores de Lagrange, Condiciones de Primer y Segundo Orden. Geometría de la Optimización

Optativo: Sobre los últimos tres puntos se recomienda la lectura de las siguientes Notas Docentes:

a) Optimización Multivariante Estática
b) Interpretación Económica de los Multiplicadores de Lagrange

Ambos pueden ser consultados en el siguiente sitio web:

http://www.eco.unc.edu.ar/ief/miembros/archivos/prof_oviedo/index.htm

Un resumen del primer artículo puede encontrarse cómo apéndice al final de este libro.

1.- Sobre Restricciones Presupuestarias

i. Defina conceptualmente que se entiende por *Restricción Presupuestaria*. Compare esa definición con la de *Conjunto Presupuestario.* En ambas definiciones asuma el desafío de usar conceptos, que sin ser imprecisos, permitan a alguien que no estudie Economía entender con claridad lo que le está diciendo.

ii. Defina ahora Restricción Presupuestaria y conjunto presupuestario de manera algebraica. Utilice solo simbología Matemática. Suponga para ello un nivel de Ingreso constante igual a M, y precios de dos bienes X y Y también constantes iguales a P_x y P_y respectivamente

iii. Defina ahora los conceptos anteriores de manera Geométrica. Trace una gráfica aproximada.

iv. En base a la gráfica de la Recta Presupuestaria anterior calcule su ordenada y su abcisa al origen de manera algebraica. Defina en términos conceptuales-económicos (use sólo palabras del lenguaje cotidiano) ordenada al origen y abcisa al origen explicando porqué esa definición coincide con el resultado algebraico anterior. Observe como los tres lenguajes (algebraico, geométrico y conceptual) dicen exactamente lo mismo pero desde distintos enfoques.

v. Halle la **pendiente** de la Recta Presupuestaria algebraicamente. Interprete dicha pendiente en base al concepto de "**Costo de Oportunidad"** primero y en base al concepto de "**Valoración Objetiva del Mercado"** de un bien en términos del otro después. Reflexione nuevamente sobre la coincidencia de ambos lenguajes.

vi. Suponga un **aumento en el nivel de Ingreso** de éste consumidor manteniendo todos los demás parámetros constantes. Analice los efectos geométricos, algebraicos y conceptuales como consecuencia de tal cambio en: Abcisa al origen, Ordenada al Origen y Pendiente. Contemple en cada caso la coincidencia del triple lenguaje (conceptual, algebraico y geométrico)

vii. Suponga ahora un aumento en el precio del Bien X, P_x, permaneciendo todo lo demás constante. Analice todos los efectos de tal cambio igual que en el caso anterior.

viii. Ídem que en el apartado anterior pero con el Bien Y. (Advertencia: no subestime el hecho de que éste ejercicio es igual que el anterior y caiga en la tentación de darlo por sabido, puede hallarse con sorpresas, especialmente en lo que se refiere a las interpretaciones conceptuales)

ix. Ídem que en los tres apartados anteriores pero suponiendo caídas en el ingreso primero, caída en el precio de X después y finalmente caída en el precio de Y. (Vale la misma Advertencia del Apartado anterior)

x. Analice los efectos sobre la Recta presupuestaria (Pendiente, Ordenada y Abcisa al origen) de un **aumento proporcional e igual en el precio de ambos bienes** permaneciendo el nivel de Ingreso Constante.

xi. Examine las consecuencias sobre la Recta Presupuestaria de un aumento proporcional e igual en todos los parámetros: M, P_x, y P_y.

xii. Realice todos los apartados anteriores pero suponiendo los siguientes datos: M=\$100; P_x=\$5; P_y=\$2. Cuando analice subas o bajas en los precios o niveles de ingreso suponga aumentos de o reducciones de \$1.

2.- Sobre Preferencias del Consumidor

i. Defina conceptualmente la noción de "***Función de Utilidad"*** y explique para qué sirve. De ejemplos Algebraicos de las mismas y represente gráficamente las mismas en 3D. (No se preocupe si las gráficas se les complican, basta con un pequeño esbozo aproximado)

ii. Suponga que las preferencias de un consumidor pueden ser representadas por la siguiente función de Utilidad:

$$U(x,y) = xy$$

determine cual de las siguientes dos cestas de consumo le reporta mayor satisfacción al individuo.

A: (1,7)

B: (2,3)

iii. Ídem que el anterior pero para las siguientes funciones de Utilidad:

$$a)\ U(x,y) = x^2 y^3$$
$$b)\ U(x,y) = 20x^3 y^5$$
$$c)\ U(x,y) = x^\alpha y^\beta \qquad \alpha,\beta > 0$$
$$d)\ U(x,y) = Ax^\alpha y^\beta \qquad A,\alpha,\beta > 0$$
$$e)\ U(x,y) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$f)\ U(x,y) = 2\ln(x) + 3\ln(y)$$
$$g)\ U(x,y) = x + \ln(y)$$
$$h)\ U(x,y) = 100 + 5x + 3y$$
$$i)\ U(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

Los casos c) y d) omítalos por el momento.

iv. Defina “***Utilidad Marginal”*** de un bien de manera conceptual y calcule la $\boldsymbol{UMg_x}$ y la $\boldsymbol{UMg_y}$. en base a la función de Utilidad del apartado ii). Recuerde que al igual que la función de Utilidad, las Utilidades Marginales son funciones de las dos variables: *x* e *y*

v. Ídem que el anterior pero para todas las funciones

vi. Siguiendo con las preferencias del apartado ii), Halle analíticamente la ecuación de las curvas de Indiferencias que pasan por las cestas A y B respectivamente. Defina “***Curva De Indiferencia”*** de manera conceptual y trace una gráfica aproximada

vii. Ídem que el anterior pero para la totalidad de las funciones del apartado iii)

viii. Defina **Tasa Marginal de Sustitución** de manera conceptual en términos de Unidades de sacrificio y en términos de **Valoración Subjetiva** y propia del individuo de un bien en términos del otro.

ix. Calcule analíticamente la Tasa Marginal de Sustitución (TMS) como la pendiente (derivada) de las curvas de indeferencias que halló en el apartado vi) evaluadas en las cestas A y B respectivamente. Interprete conceptualmente

x. Ídem que el anterior pero obtenga la TMS en los puntos A y B como cociente cambiado de signo de las Utilidades Marginales. Para ello calcule las respectivas derivadas parciales, forme el cociente, cambie el sigo y evalúe en los pares ordenados A: (1,7) y B: (2,3). Interprete conceptualmente y compruebe que obtuvo el mismo resultado que en el ejercicio anterior.

xi. Suponga ahora la cesta C: (4,5). Calcule la TMS por el Método de la pendiente de la Curva de Indiferencia (CI). Para ello, calcule la Utilidad alcanzada en ese punto, iguale la expresión de la función de Utilidad del ejercicio al nivel de utilidad en C (en éste caso es $xy=20$) despeje para obtener la CI en términos analíticos, derive con respecto a x y evalúe en el punto $x=4$. Calcule además por el Método del Cociente de Utilidades Marginales. Verifique.

xii. Para las funciones de utilidad del apartado iii) calcule la TMS en la Cesta A por ambos métodos.

3.- Sobre Óptimo del Consumidor y Funciones de Demanda

i. Suponga un consumidor cuyas preferencias están descriptas por la función de utilidad $\boldsymbol{U}(x, y) = xy$, que los precios de los bienes X e Y están fijos en \$2 y \$5 respectivamente y que posee ingresos fijos de \$100. En base a dicha información determine la cesta de consumo dentro de su restricción presupuestaría que maximiza su Utilidad. Para ello plantee el problema de Optimización restringida pertinente, forme la función Lagrangeana y resuelva. Esboce dos gráficas, una en 3D y otra en los ejes *x,y* que describan el problema anterior. Explique el significado de los valores hallados cómo óptimos de este consumidor.

ii. Indique si las cestas (10, 16), (30, 8) y (50, 20) constituyen un optimo justificando geométrica, analítica y conceptualmente en base a los datos del apartado anterior.

iii. Suponga que los precios del bien X se modifican de la siguiente manera permaneciendo todo lo demás constante:

$$a)\ P_x^1 = \$1$$
$$b)\ P_x^2 = \$2$$
$$c)\ P_x^3 = \$3$$
$$d)\ P_x^4 = \$4$$
$$e)\ P_x^5 = \$5$$

Para cada valor del nuevo precio de *x* halle la nueva cesta de consumo que maximiza la utilidad de éste consumidor es decir resulta 5 problemas de optimización restringida como los del ejercicio anterior.. En base a esos resultados construya una tabla con dos columnas: una con el precio del bien *x* y otra con el nivel de consumo óptimo del bien *x*. Interprete los resultados hallados. Confeccione dos gráficas: en una muestre en el plano *x,y* como los sucesivos cambios del bien x afectan la pendiente y la abcisa al origen de la Recta Presupuestaria (RP) y los nuevos puntos de tangencia entre la RP y las CI, y en otra grafique en el plano x,P_x la tabla colocando el precio de x en las ordenadas y las cantidades óptimas en las abscisas. ¿Qué nombre recibe ésta tabla y la última gráfica? Interprete

iv. Ídem ejercicio anterior solo que para un nivel de Ingresos de \$200. Calcule los nuevos óptimos, y realice ambas graficas. Compare la segunda gráfica de este ejercicio con la segunda grafica del apartado anterior e interprete a ella como un cambio en la demanda de x como consecuencia del aumento del ingreso. Haga lo mismo pero ahora para un ingreso de \$50.

v. Ídem que el apartado anterior pero modificando el precio del bien y a 7 unidades. Observe como en este caso particular de función de utilidad los bienes x e y resultan ser independientes pues los precios del otro bien no afectan la demanda (para otras funciones ésto no se verifica, pruebe por ejemplo con la función del apartado 2-ii-g).

vi. Gracias al ejercicio anterior uno comienza a entender el significado y el origen de las funciones de demanda y comienza a entender porqué las funciones de demanda dependen del precio del propio bien, del ingreso y del precio de otros bienes. Sin embargo para llegar a la misma hay que construir una tabla mediante la resolución de innumerables problemas de optimización lo cual es largo y tedioso. Con este fin, se procede a eliminar ésta dificultad. Para ello resuelva el problema del apartado 2-i) pero trabajando con parámetros sin especificar es decir trabaje con P_x, P_y y M de manera genérica y algebraica. Forme el Lagrangeano y resuelva algebraicamente. Observe que los nuevos óptimos que Ud. hallo pueden interpretarse como funciones que dependen de los parámetros P_x, P_y y M. Éstas funciones son las mismas funciones de demanda que hallo Ud anteriormente. Para verificar la veracidad reproduzca las tablas anteriores evaluando en las funciones de demanda genéricas de este apartado los datos consignados en los apartados anteriores.

vii. En base a las funciones de demanda del apartado anterior, observe como ahora es posible graficar la función de manera continua y no solo unos 5 puntos como cuando graficaba en la tabla. Observe también como puede obtener la expresión analítica exacta de cada una de las curvas de demanda cuando se modifica el nivel de ingreso. Medite sobre el ahorro de cálculos al trabajar de una manera genérica y la ganancia de precisión.

viii. Halle las funciones de demanda de los bienes x e y que dependen de P_x, P_y y M para cada una de las funciones de Utilidad del apartado 2-ii) excepto los sub-apartados h e i. Interprete y grafique cuando sea posible.

ix. Defina "***Curva de Ingreso Consumo***" (CIC) en términos conceptuales y calcúlela analíticamente en base a las funciones de demanda del Apartado vi) (Ayuda: despeje M de la función de demanda del bien x y substitúyala en la función de demanda del bien y de modo de arribar a una expresión que dependa solo de x $(y=g(x))$ Dado que la CIC se define manteniendo constantes los precios de los bienes x e y fije a los mismo en \$2 y \$5 respectivamente.

x. ¿Que sucede con la CIC si cambian los precios de los bienes x e y?

xi. Defina "***Curva de Engel***" (CE). Observe que la expresión analítica de la misma es la misma función de demanda manteniendo fijo los precios de los bienes x e y. Su representación gráfica es la demanda dibujada en el plano *x,M*.

xii. ¿Qué sucede con la CE si se modifican los precios?

xiii. Obtenga la pendiente de la misma y explique que significa. Clasifique al bien en base a ello en Normal, Inferior o Neutro.

xiv. Resuelva los tres apartados anteriores para las funciones de demanda del apartado 2-iii) excepto puntos h e i.

xv. Defina "***Curva Precio Consumo***" o "***Curva Oferta Precio***" de manera conceptual. Trace una gráfica aproximada de la misma en base a los datos del ejercicio y suponiendo un Ingreso constante e igual a \$100 y el precio del bien e igual a \$5. Observe que la gráfica de esta curva ya la realizó de manera aproximada en el primer gráfico del apartado iii). Obtenga la expresión analítica de la misma (Ayuda: despeje P_x de la ecuación de la demanda del bien *x* y sustitúyala en la ecuación de la demanda del bien *y*. Si dado los datos particulares de la función de Utilidad se arriban a una función de demanda del bien *y* que no depende del precio de *x* (bienes independientes) no es posible llevar a cabo la sustitución luego la Curva de Precio Consumo es una línea horizontal constante)

xvi. ¿Que sucede con la CPC si cambian los precios del bien y o si se modifica el nivel de Ingreso?

xvii. Resuelva los dos apartados anteriores para las funciones de demanda del apartado 2-iii) excepto puntos h e i.

xviii. En base a las funciones de demanda del apartado vi) calcule las elasticidades punto del ingreso, del precio del propio bien y la elasticidad cruzada. Clasifique al bien en cuestión de acuerdo a cada una de esas elasticidades.

xix. Relacione la pendiente de la CPC con la variación del gasto en el bien x y el tipo de elasticidad precio del bien *x* (elástica, inelástica o unitaria)

xx. En base a los datos del apartado i) calcule el efecto sustitución e ingreso de manera analítica de un aumento en el precio del bien x en \$1. Grafique e interprete conceptualmente.

xxi. Ídem pero suponiendo una caída en el precio en \$1 del bien *x*.

xxii. Ídem que apartados anteriores pero para cambios en el precio del bien *y*

xxiii. Ídem que en los tres apartados anteriores pero para las funciones de demanda del apartado 2-iii) con especial atención al sub-apartado g.

xxiv. Analice los efectos en la Recta Presupuestaria de un impuesto de \$1 en el precio del bien x. Suponga un Ingreso de \$100, y precios de x e y iguales a \$2 y \$5 respectivamente.

xxv. Analice los efectos en las demandas del consumidor (*x* e *y*) con preferencias iguales que en el apartado i)

xxvi. Idem pero para un consumidor cuyas preferencias se describen por la función de utilidad del apartado 2-iii-g).

4.- Sobre Producción en el Corto Plazo

i. En base a la siguiente función de producción:

$$Q(L) = -128.5 + 2.74L + 0.000511L^2 - 0,000000558L^3$$

Defina función de producción. Grafique la misma. Determine el valor de L en donde el Producto Total es máximo. Halle el punto de inflexión

ii. En una gráfica paralela hacia abajo grafique producto medio y marginal. Previamente defínalos algebraica y conceptualmente. Sea cuidadoso en determinarlos máximos de tales funciones. Relacione tales gráficas con las definiciones geométricas de las mismas (rayos y pendientes)

iii. Marque las etapas I, II y III de producción y relaciónelas conceptualmente con la ley de los rendimientos marginales decrecientes.

5.- Sobre Isocuantas e Isocostos[1]

i. Defina conceptualmente la noción de "***Función de Producción de Largo Plazo***" y explique para qué sirve y distíngala de una función de Utilidad. De ejemplos Algebraicos de las mismas y represente gráficamente las mismas en 3D. (No se

[1] Las resoluciones analíticas de ésta sección son similares a secciones anteriores referidas a teoría del Consumidor, por lo que si tales aspectos los tiene profundamente comprendidos, concéntrese sólo en las interpretaciones económicas de tales resoluciones.

preocupe si las gráficas se les complican, basta con un pequeño esbozo aproximado)

ii. Suponga que la función de producción de una empresa es la siguiente:

$$Q(L,K) = LK$$

determine cual el nivel de producto que se puede obtener con los siguientes planes de producción (un plan de producción es una combinación de insumos):

A: (1,7)

B: (2,3)

iii. Ídem que el anterior pero para las siguientes funciones de Producción:

$$a)\ Q(L,K) = L^2K^3$$
$$b)\ Q(L,K) = 20L^3K^5$$
$$c)\ Q(L,K) = L^{\alpha}K^{\beta} \qquad \alpha,\beta > 0$$
$$d)\ Q(L,K) = AL^{\alpha}K^{\beta} \qquad A,\alpha,\beta > 0$$
$$e)\ Q(L,K) = \ln(L) + \ln(K)$$
$$f)\ Q(L,K) = 2\ln(L) + 3\ln(K)$$
$$g)\ Q(L,K) = L + \ln(K)$$
$$h)\ Q(L,K) = 100 + 5L + 3K$$
$$i)\ Q(L,K) = (L-1)^2 + (K-2)^2$$

Defina "***Producto Marginal***" de un insumo de manera conceptual y calcule la ***PMg***$_L$ y la ***UMg***$_K$. en base a la función de Utilidad del apartado ii). Recuerde que al igual que la función de Producción, las Productividades Marginales son funciones de las dos variables: x e y

iv. Ídem que el anterior pero para todas las funciones

v. Siguiendo con las preferencias del apartado ii), Halle analíticamente la ecuación de las Isocuantas que pasan por las cestas A y B respectivamente. Defina "***Isocuantas***" de manera conceptual y trace una gráfica aproximada

vi. Ídem que el anterior pero para la totalidad de las funciones del apartado iii)

vii. Defina **Tasa Marginal de Sustitución Técnica** de manera conceptual en términos de Unidades de sacrificio y en términos de **Valoración Subjetiva del Proceso Productivo** de un bien en términos del otro.

viii. Calcule analíticamente la Tasa Marginal de Sustitución Técnica (TMST) como la pendiente (derivada) de las Isocuantas que halló en el apartado vi) evaluadas en las cestas A y B respectivamente. Interprete conceptualmente

ix. Ídem que el anterior pero obtenga la TMS en los puntos A y B como cociente cambiado de signo de las Utilidades Marginales. Para ello calcule las respectivas derivadas parciales, forme el cociente, cambie el sigo y evalúe en los pares ordenados A: (1,7) y B: (2,3). Interprete conceptualmente y compruebe que obtuvo el mismo resultado que en el ejercicio anterior.

x. Suponga ahora la cesta C: (4,5). Calcule la TMST por el Método de la pendiente de la Isocuanta (CI). Para ello, calcule el nivel de Producción alcanzado en ese punto, iguale la expresión de la función de Producción del ejercicio al nivel de producción en C (en éste caso es $KL=20$) despeje para obtener la Isocuanta en términos analíticos, derive con respecto a L y evalúe en el punto L=4. Calcule además por el Método del Cociente de Productividades Marginales. Verifique.

xi. Ídem para las funciones de Producción del apartado iii) calcule la TMST en el plan de consumo A por ambos métodos.

xii. Defina ***Isocosto*** de manera conceptual y analítica. Grafique. Efectué análisis de ordena al origen, abcisa al origen y pendiente como resultado de modificaciones en los precios de los factores y en el Costo Total. Grafique e interprete

6.- Sobre Costos en Largo Plazo

i. Suponga una empresa cuya función de producción de largo plazo está descripta por $\boldsymbol{Q(L,K)=L^2K}$, que los precios de los insumos productivos L y K están fijos en \$2 y \$5 respectivamente y que desea producir a la manera mas barata posible 100 unidades de Producto Q. En base a dicha información determine la combinación de insumos productivos que minimiza el costo de producir la cantidad deseada de producto. Para ello plantee el problema de Optimización restringida pertinente, forme la función Lagrangeana y resuelva. Esboce dos gráficas, una en 3D y otra en los ejes L,K que describan el problema anterior. Explique el significado de los valores hallados cómo óptimos de este consumidor.

ii. Indique si los planes de producción $(L,K) = (10, 16), (30, 8)$ y $(50, 20)$ Minimizan el costo de producir las 100 Unidades anteriores justificando geométrica, analítica y conceptualmente en base a los datos del apartado anterior.

iii. Ídem que el apartado i) pero para los siguientes niveles de producción:

a) Q=30

b) Q=70

c) Q=100

d) Q=150

e) Q=300

Confeccione una Tabla de dos columnas colocando en la primer columna el Nivel deseado de Producción y en la segunda la cantidad de insumo L que permite producirla a Costo Mínimo. Haga lo mismo pero para el insumo K. Grafique ambas Tablas. Llámele a tales Gráficas: ***Demandas Condicionadas de Factores***

Calcule el Costo Mínimo de producir cada nivel de Producto multiplicando los valores óptimos de L y K asociados a cada nivel de Q deseado y sumándolos. Confeccione una Tabla y Grafique. Denomine a esa Gráfica: **Función de Costos de Largo Plazo**.

iv. Obtenga las expresiones analíticas de las gráficas que confeccionó en el apartado anterior. Observe que para esto Usted debe resolver el problema de minimización de Costos pero trabajando con el parámetro $Q = Q_0$. De ésta manera arribará a soluciones algebraicas en donde los valores de L y K que minimizan el Costo Total dependen del parámetro Q_0 . Luego esas expresiones óptimas $L(Q_0)$ y $K(Q_0)$ que Usted halló son las ***Funciones de Demandas Condicionadas de Factores***. Defina conceptualmente las mismas y verifique que de tales funciones se pueden obtener los resultados del apartado anterior. Para obtener la expresión analítica de la Función de Costo de Largo Plazo multiplique las funciones de demandas condicionadas de factores por sus precios y sume. Defina conceptualmente ***Función de Costos de Largo Plazo.***

v. Ídem que en ambos apartados anteriores pero suponiendo un aumento en el precio del insumo L de \$1. Lo mismo pero para una caída de \$1. Es decir obtenga las expresiones analíticas y las gráficas de las Demandas Condicionadas de Factores y la Función de Costos de Largo Plazo.

vi. Ídem que en apartados iii) y iv) pero para aumento en \$1 en el precio del insumo K

vii. Observe que puede ahorrar mucho trabajo y tiempo si resuelve el problema de minimización de costos original pero trabajando algebraicamente con los parámetros ***w***,***r*** y ***Q***. Es decir resuelva:

$$\min_{L,K} CT = wL + rK$$
$$s.a: \quad L^2 K = Q$$

Las expresiones de las cantidades óptimas de L y K dependerán ahora de ***w***,***r*** y ***Q*** lo mismo que la Función de Costos. Con éstas nuevas expresiones algebraicas usted puede analizar los cambios en las funciones de demandas condicionadas y en la función de costos cuando se producen variaciones en cualquiera de los parámetros ***w***,***r*** y ***Q*** sin necesidad de resolver nuevamente el problema original. Efectuelo.

viii. Obtenga el ***Costo Medio*** y ***Marginal*** de Largo Plazo. Grafíquelos y defínalos conceptualmente.

ix. Lo mismo que en los apartados vii) y viii) pero para todas las funciones de producción del apartado 5 iii) excepto la última.

7.- Sobre Costos en el Corto Plazo y sus relaciones con el LP

i. Continuando con la función de Producción $\boldsymbol{Q=L^2K}$ suponga que el stock de Capital permanece fijo en un valor de 10 unidades. En base a ello y manteniendo los valores de los precios de los insumos productivos w y r en \$2 y \$5 respectivamente, halle la cantidad de L que minimiza el costo de producir 100 unidades. En otras palabras resuelva el siguiente problema de minimización restringida[2]:

$$\min_{L} CT = 2L + 50$$
$$s.a: \quad 10L^2 = 100$$

[2] Téngase presente que el Método de Multiplicadores de Lagrange sólo funciona cuando la cantidad de restricciones es menor al número de variables de elección. En éste caso existe una variable de elección y una restricción por lo que tal metodología no sirve para este problema. Para resolverlo simplemente despeje la variable de la restricción y ese valor será el óptimo.

Halle tal óptimo. Calcule el Costo Total Mínimo de producir en el Corto Plazo 100 unidades a los precios dados de los factores.

ii. Ídem que el anterior pero para los siguientes niveles de producción:

a) Q=30

b) Q=70

c) Q=100

d) Q=150

e) Q=300

Confeccione una Tabla de dos columnas colocando en la primer columna el Nivel deseado de Producción y en la segunda la cantidad de insumo L que permite producirla a Costo Mínimo. Grafique. Llámele a tal Gráfica: ***Demanda Condicionada de Factor Trabajo***

Calcule el Costo Mínimo de producir cada nivel de Producto multiplicando el valor óptimo de L asociado a cada nivel de Q y el nivel fijo de K de 10 unidades por su precio y sumándolos (en otras palabras, evalúe el óptimo en la función objetivo. Confeccione una Tabla y Grafique. Denomine a esa Gráfica: **Función de Costos de Corto Plazo para un nivel fijo de Capital de 10 unidades**.

iii. Obtenga las expresiones analíticas de las gráficas que confeccionó en el apartado anterior. Observe que para esto Usted debe resolver el problema de minimización de Costos pero trabajando con el parámetro $\boldsymbol{Q= Q_0}$. De ésta manera arribará a soluciones algebraicas en donde los valores de L que minimizan el Costo Total dependen del parámetro $\boldsymbol{Q_0}$. Luego esas expresiones óptimas L($\boldsymbol{Q_0}$) que Usted halló es la ***Función de Demanda Condicionada de Factor de Corto Plazo***. Defina conceptualmente las mismas y verifique que de tales funciones se pueden obtener los resultados del apartado anterior.

Para obtener la expresión analítica de la Función de Costo de Corto Plazo evalúe la función de demanda condicionada en la función Objetivo. Defina conceptualmente ***Función de Costos de Corto Plazo.***

iv. Ídem que en el apartado anterior pero para los siguientes niveles de stocks de Capital:

a) K=20

b) K=30

c) K=50

d) K=100

e) K=150

Para cada uno de ellos halle la Función de Demanda Condicionada de Factor de Corto Plazo planteando y resolviendo previamente el problema de optimización asociado a cada uno de ellos. Obtenga para cada nivel de stock de Capital la respectiva Función de Costos de Corto Plazo. Grafíquelas simultáneamente en una misma gráfica.

v. Observe que puede ahorrar mucho trabajo y tiempo si resuelve el problema de minimización de costos original pero trabajando algebraicamente con los parámetros ***Q y K***. Es decir resuelva:

$$\min_{L,K} CT = 2L + 5\overline{K}$$
$$s.a: \quad L^2\overline{K} = Q$$

Las expresiones de las cantidades óptimas de L dependerán ahora de ***Q*** y ***K*** lo mismo que la Función de Costos.. Efectuelo.

vi. Grafique las Curvas de Costo de CP y la Curva de Costo de LP de apartados anteriores (6-iv) y verifique que ésta última es la envolvente geométrica de las anteriores. Explique por qué se da esa coincidencia geométrica.

vii. Obtenga el ***Costo Medio*** y ***Marginal*** de Corto Plazo. Grafíquelos y defínalos conceptualmente. Efectuelos para cada nivel de Capital y verifique geométricamente que los Costos Medios de Largo Plazo (apartado 6-viii) son las envolventes de los Medios y Marginales de Corto Plazo. Explique por qué se da esa coincidencia geométrica.

viii. Al igual que casos anteriores Ud puede resolver problemas de corto plazo más generales para dar respuesta a preguntas del tipo: ¿Qué sucede si se modifican los precios de los insumos productivos ***w*** y ***r***?

Para ello resuelva el siguiente problema general:

$$\min_{L,K} CT = wL + r\overline{K}$$
$$s.a: \quad L^2\overline{K} = Q$$

Con lo cual las nuevas Demandas condicionadas dependerán de ***Q***, ***K***, ***w*** y ***r.*** Igualmente las Funciones de Costos Totales, Medios y Marginales de Corto Plazo guardarán dicha dependencia con tales parámetros. Efectúelo

ix. Efectué el mismo análisis entre Costos de Corto y Largo Plazo para todas (excepto la última) de las funciones de Producción del Apartado 5-iii) mostrando que la última es la envolvente geométrica de las primeras. Es decir Obtenga los Costos Totales, Medios, y Marginales de Corto Plazo para la totalidad (excepto la última) de las funciones de producción del apartado 5 iii) para distintos niveles de K, grafíquelas y compárelas con las Curvas de Largo Plazo respectivas (6-ix).

8.- Sobre Rendimientos a Escalas, Senderos de Expansión y Elasticidades Producto

i. Defina Conceptualmente Sendero de Expansión. Obténgalo analíticamente para la totalidad (excepto la última) de las funciones de producción del apartado 5 iii). Grafíquelo
ii. Calcule el grado de Homogeneidad para la totalidad (excepto la última) de las funciones de producción del apartado 5 iii). Defina Rendimientos a Escalas y en base al grado de Homogeneidad clasifique las mismas en relación al Tipo de Rendimientos a Escala que presenta.
iii. Defina rendimientos a escala y relaciónelos con la concavidad, convexidad de la Función de Costos de Largo Plazo. Relaciónelos también con Los Costos Medios y Marginales de Largo Plazo.
iv. Defina Elasticidad Producto y Elasticidad Escala conceptual y analíticamente. Calcúlelas para la totalidad (excepto la última) de las funciones de producción del apartado 5 iii) e interprete. Relacione ambos conceptos de elasticidad.
v. Relacione Producto Medio, Marginal, Costo Medio y Marginal para la totalidad (excepto la última) de las funciones de producción del apartado 5 iii) con etapas de la producción (I, II y III)

9.- Casos especiales de Funciones de Producción

i. Obtenga las funciones de Demandas condicionadas de los Factores, Funciones de Costos Totales, Medios y Marginales de las siguientes Funciones de Producción:

a) $Q = aL+bK$

b) $Q = aL^2+bK^2$

c) $Q = Min (L, K)$

d) $Q = Min (aL, bK)$

e) $Q = [A – (L–5)^2 – (K–10)^2]^{1/2}$

10.- Demanda de Mercado

i. Suponga una Economía constituida por 100 agentes de los cuales 30 de ellos poseen preferencias descriptas por la Función de Utilidad ***U(X,Y)=XY*** y Rentas de 200 pesos cada una, 50 preferencias dadas por ***U(X,Y)=***$\boldsymbol{X^3Y^2}$ e Ingresos de 500 pesos cada uno y el resto preferencias dadas por ***U(X,Y)=ln(X) +5Y*** con Ingresos de 1000 pesos. Con esa información calcule

   a. Demanda de Mercado del Bien X
   b. Demanda de Mercado del Bien Y
   c. Elasticidades Precio y Cruzada de ambas Demandas de Mercado

ii. Suponga una función de Demanda de Mercado del Bien X dada por $\boldsymbol{Q_X=5-P^2}$. A su vez suponga que el precio de equilibrio actual es de 1. Calcule el Excedente del Consumidor. Grafique e Interprete económicamente.

iii. Suponga ahora que el precio se modifica a 0.5. Calcule la variación del Excedente del Consumidor indicando geométricamente su significado e interpretándolo económicamente.

11.- Sobre Competencia Perfecta

i. Derive las Condiciones de Optimalidad que deben verificarse en una Empresa para que la misma Maximice Beneficios. Para ello utilice las ***Condiciones de Primer y Segundo Orden*** del siguiente Problema de Optimización:

$$\max_{Q} BT = PQ - CV(Q) - CF$$

donde P es un parámetro que representa el precio de venta del producto, Q es una variable que indica la cantidad producida y vendida, CV(Q) es una función genérica de Costos Totales Variables y CF es una constante que representa a los Costos Fijos Totales de Producción.

Interprete las Condiciones de Primer y Segundo Orden en términos Económicos.

ii. Dado que una empresa en el Corto Plazo siempre tiene la posibilidad de retirarse del mercado produciendo Q = 0 si sus Beneficios son Menores a – CF [BT*< – CF] (o alternativamente si los Ingresos por Venta no cubren los Costos Variables de Producción), complete las condiciones de optimalidad que halló e interpreto en el apartado anterior[3] considerando este nuevo hecho. Para ello debe comparar los Beneficios Óptimos de la Firma con –CF y determinar el mayor [es decir BT(Q=Q*) vs. BT(Q=0)= -CF]. Encuentre que condiciones debe verificar un punto que cumpla con las condiciones de 1er y 2do Orden y genere Beneficios iguales a – CF [es decir BT(Q=Q*) = – CF] deduciendo sobre la base de ello el ***Punto de Cierre*** de la Empresa. Trace una gráfica aproximada.

iii. Suponga una empresa que opera en un mercado perfectamente competitivo con una función de Costos de Corto Plazo dada por:

$$CT(Q) = Q(Q-1)^2 + 5Q + 100$$

Se pide:

a. Halle las cantidades óptimas a producir por dicha empresa si el precio del producto Q es de $7 por unidad.

b. Derive la función de Oferta de la Empresa en el Corto Plazo. Para ello suponga un precio igual a P. No olvide la Condición de Cierre. Trace una gráfica aproximada.

iv. Analice los Efectos sobre el Nivel de Producción y Beneficios de la Firma en un mercado perfectamente competitivo como consecuencia de la aplicación de los siguientes tipos de impuestos:

a. Impuestos a las Ganancias con una alícuota igual a t [0>t>1]

b. Impuestos a las Cantidades Producidas de t pesos por unidad

[3] Las Condiciones de Primer y Segundo Orden que utilizó en el apartado anterior sirven sólo para detectar Máximos y Mínimos Locales pero no Globales. Esta deficiencia del Método, que se soluciona con las Condiciones de Kuhn- Tucker, tiene una consecuencia económica que se traduce en el olvido de las condiciones de Cierre de la Firma, ya que el Método usual de Optimización no es capaz de reconocerlas.

c. Impuestos a los Ingresos Totales (Ingresos Brutos) con una alícuota t [0>t>1]
   En todos los casos trabaje con una Función Genérica de Costos CT(Q). No considere problemas concernientes a los Puntos de Cierre. Utilice la información que proveen las Condiciones de Primer y Segundo Orden par derivar los efectos solicitados en comparación a una situación sin impuestos.

v. En los ejercicios anteriores trace una gráfica que demuestre como se modifica la curva de Oferta como consecuencia de la aplicación de los distintos tipos de gravámenes en comparación a una situación sin impuestos.

vi. Basándose en la siguiente Función de Costos:

$$C(Q) = 100Q(Q-20)^2 + 300Q$$

Halle las nuevas curvas de Oferta como consecuencia de la aplicación de los distintos tipos de impuestos señalado en el apartado iv. Trabaje con alícuotas iguales a 0.35.

Para un precio de $400 analice los efectos sobre los Beneficios de la firma. Trace una gráfica aproximada.

vii. Suponga que una empresa representativa de la ***Industria de Largo Plazo*** está caracterizada por la siguiente ***Función de Costos de Largo Plazo***:

$$C(Q) = 7Q(Q-80)^2 + 40Q$$

mientras que la Demanda de la Industria es Igual a *D(Q)= 100 – P*.

Halle el ***número de firmas de la Industria***. Explique detalladamente cómo lo obtuvo y el fundamento económico de tales cálculos. Trace una Gráfica aproximada.

viii. Continuando con los datos del ejercicio anterior indique si un precio: P=50 es un precio de equilibrio de Largo Plazo. Explique porqué. Indique además si ese precio genera incentivos al ingreso de nuevas firmas o a la salida de firmas existentes. ¿Y si el precio fuese de 35?

12.- Sobre Monopolio

i. Derive las Condiciones de Optimalidad que deben verificarse en una Empresa que actúa de manera Monopólica en una Industria para que la misma Maximice Beneficios. Para ello utilice las ***Condiciones de Primer y Segundo Orden*** del siguiente Problema de Optimización:

$$\max_{Q} BT = P^{-1}(Q)Q - CT(Q)$$

donde $P^{-1}(Q)$ es la ***Función Inversa de Demanda***, Q es una variable que indica la cantidad producida y vendida, CT(Q) es una función genérica de Costos Totales de Producción.

Interprete las Condiciones de Primer y Segundo Orden en términos Económicos.

ii. Defina conceptual y analíticamente ***Función Inversa de Demanda*** en base a funciones genéricas como en el apartado i). Explique que tipo de información provee la misma al Monopolista.

iii. Defina ***Ingreso Total*** del monopolio en base a funciones genéricas como en el aparatado i). Defina y calcule el ***Ingreso Marginal*** descomponiéndolo en ***Efecto Precio*** y ***Efecto Cantidad*** derivando la expresión anterior con la regla de la derivada del producto.

iv. Demuestre que el Ingreso Marginal de un Monopolio es siempre menor que la Función Inversa de Demanda [es decir $IMg < P$]. (Ayuda: use la regla de la cadena, despeje y analice los signos de los términos.) Grafique

v. Demuestre utilizando las Condiciones de Primer y Segundo Orden que las cantidades vendidas en un Monopolio son siempre menores que las vendidas en Competencia Perfecta. De igual manera demuestre que el precio en industrias Monopólicas es mayor que en Industrias Competitivas.

vi. Teniendo en cuenta las conclusiones de los apartados iv) y v) reflexione sobre la ***Ineficiencia del Monopolio*** y la ***Eficiencia de la Competencia Perfecta*** definiendo previamente dicho concepto. Grafique.

vii. Explique porqué un Monopolista jamás maximizaría Beneficios en un tramo inelástico de la Función de Demanda.

viii. Suponga que la Demanda de un producto Q en una Industria Monopólica y la respectiva Función de Costos de la empresa son las siguientes:

$$Q(P) = 100 - 3P$$
$$C(Q) = Q(Q-10)^2 + 4Q$$

En base a esos datos obtenga:

a. Cantidades óptimas a producir por el monopolio
b. Precio que fija la empresa.
c. Elasticidad de la demanda en el precio fijado por el monopolio.

d. Ingresos Totales, Costos Totales y Beneficios Totales del Monopolista
e. Utilizando sólo los datos de la Función de demanda calcule: Función de Ingresos Totales e Ingreso Marginal (discriminando entre Efectos Precios y Efectos Cantidad). Grafique. Compruebe que el Ingreso Marginal se encuentra por debajo de la Función Inversa de Demanda.

ix. Analice los Efectos sobre el Nivel de Producción y Beneficios de la Firma en un mercado Monopólico como consecuencia de la aplicación de los siguientes tipos de impuestos:

a. Impuestos a las Ganancias con una alícuota igual a t [0>t>1]
b. Impuestos a las Cantidades Producidas de t pesos por unidad
c. Impuestos a los Ingresos Totales (Ingresos Brutos) con una alícuota t [0>t>1]
En todos los casos trabaje con una Función Genérica de Costos *CT(Q)* y una función inversa de demanda genérica $P^{-1}(Q)$. Utilice la información que proveen las Condiciones de Primer y Segundo Orden par derivar los efectos solicitados en comparación a una situación sin impuestos. Si para algunos casos no puede hallar una conducta que se cumpla para funciones genéricas (como puede suceder en los apartados referentes a Beneficios) trabaje con funciones concretas como lo establece el apartado siguiente.

x. Basándose en la siguiente Función de Costos y Demanda:

$$C(Q) = 100Q(Q-20)^2 + 300Q$$
$$Q(P) = 70 - 2P$$

a. Halle las cantidades optimas a producir como consecuencia de la aplicación de los distintos tipos de impuestos señalado en el apartado ix. Trabaje con alícuotas iguales a 0.35. Compare dichas cantidades con una situación sin impuestos. Obtenga conclusiones.
b. Efectúe la misma comparación sobre los Beneficios antes y después de Impuestos.
c. Trace una gráfica aproximada.

xi. Suponga que un Monopolista con función genérica de costos C(Q) tiene la posibilidad de vender su producto en dos mercados totalmente separados, es decir puede llevar a cabo una ***Discriminación de Precios de Segundo Grado*** con funciones de demandas genéricas $D_1(Q_1)$ y $D(Q_2)$. Deduzca las condiciones de Optimalidad que deben cumplir las cantidades a vender en cada uno de los respectivos mercados por medio de una conducta optimizadora. (Ayuda: Plantee el problema de optimización en dos variables, calcule las condiciones de Primer Orden siendo cuidadoso con la derivación de funciones compuestas, despeje y deduzca). Interprete dichas condiciones en términos económicos.

xii. Suponga que un monopolista con la siguiente función de Costos:

$$C(Q) = 10(Q-5)^2 + 15Q$$

que puede vender su producto en dos mercados distintos:

$$Q_1(P) = 100 - 2P$$
$$Q_2(P) = 70 - 3P$$

a. Determine las condiciones teóricas que deben verificarse en la realidad para que éste productor pueda cobrar precios distintos en ambos mercados.
b. Determine las cantidades óptimas a vender en cada mercado.
c. Calcule los precios que se cobrarán en cada mercado.
d. Compute la elasticidad precio de la demanda en cada uno de los precios cobrados en los mercados. Compare las elasticidades y las cantidades vendidas. Extraiga conclusiones.

xiii. Suponga que un Monopolista puede llevar a cabo una ***Discriminación Perfecta de Primer Grado*** en un mercado con función de Demanda genérica D(Q). Deduzca las condiciones de Optimalidad que debe cumplir la Cantidad Optima a producir. Para ello plantee cuidadosamente la Función de Beneficios en esta situación, derive atentamente bajo el signo integral, despeje y extraiga conclusiones. Trace una gráfica aproximada e interprete en términos económicos reinterpretando las nuevas definiciones analíticas de Ingreso Marginal para éste monopolista.

xiv. Compare las cantidades óptimas a producir bajo competencia perfecta y bajo Monopolio con Discriminación de Precios de Primer Grado. Halle similitudes y diferencias en Cantidades y precios producidos y cobrados a los consumidores. Reflexione sobre la ***Eficiencia*** del Monopolio con Discriminación Perfecta de Precios recordando previamente la definición de tal concepto.

xv. Para un monopolista discriminador prefecto de precios con la siguiente función de demanda y de Costos:

$$Q(P) = 200 - 7P$$
$$C(Q) = 100Q^2 - 20Q$$

Calcule:

a. Nivel óptimo de producción
b. Rango de Precios que cobrara a cada individuo
c. Ingresos Totales, Costos Totales y Beneficios Totales
d. Compare precios cobrados, cantidades producidas y Beneficios Obtenidos con una situación Monopólica sin discriminación de precios.

13.- Sobre Oligopolio

i. Suponga una Industria Duopólica cuyas empresas se comportan de acuerdo a un ***Modelo de Cártel***. Suponiendo Funciones de Demanda y Costos genéricas: *D(Q), $C_1(Q_1)$ y $C_2(Q_2$.*, derive las condiciones de Optimalidad que deben cumplir las cantidades que maximizan beneficios conjuntos. Para ello utilice las condiciones de Primer Orden sobre el siguiente problema de Optimización sin restricciones:

$$\max_{Q_1,Q_2} BT = P^{-1}(Q_1+Q_2)(Q_1+Q_2) - C_2(Q_1) - C_2(Q_2)$$

Interprete las Condiciones de Primer Orden. Grafique aproximadamente.

ii. Suponiendo que la demanda de la industria está representada por la siguiente función: D(P)=100-7P, y que las funciones de Costos de las empresas son $C_1(Q_1)=10Q_1^2 - 2Q_1$, $C_1(Q_1)=20Q_1^2 - Q_1$ Determine las cantidades que dichas empresas producirán si actúan de acuerdo a Modelo de Cartel. Determine el Precio que fijará el Cártel para los consumidores. Calcule además Beneficios totales y Costos totales. Grafique e Interprete.

iii. Suponga que un Mercado Duopólico se comporta de acuerdo al Modelo ***Líder-Seguidor*** o ***Modelo de Stackelberg*** donde la empresa Líder posee una función de Costos iguales a: $C_1(Q_1)=10Q_1^2 - 2Q_1$ mientras que la seguidora posee costos iguales a $C_1(Q_1)=20Q_1^2 - Q_1$. La demanda de la Industria es D(P)=100-7P. Calcule las cantidades a producir de cada empresa. Calcule los Beneficios y el Precio Final fijado a los productores. Compute los Beneficios totales y de cada empresa. Compare con el ejercicio anterior. Obtenga conclusiones.

iv. Suponga que un Mercado Duopólico se comporta de acuerdo al ***Modelo de Cournot*** donde una de las empresas posee una función de Costos iguales a: $C_1(Q_1)=10Q_1^2 – 2Q_1$ mientras que la otra posee costos iguales a $C_1(Q_1)=20Q_1^2 – Q_1$. La demanda de la Industria es D(P)=100-7P. Calcule las cantidades a producir de cada empresa. Calcule los Beneficios y el Precio Final fijado a los productores. Compute los Beneficios totales y de cada empresa. Compare con los ejercicios anteriores. Obtenga conclusiones y explique porqué se dan tales situaciones.

v. Suponga una empresa que se desenvuelve en una Industria Oligopólica de acuerdo y estima que si sube su precio sus competidores no lo seguirán mientras que si baja el precio todas lo imitarán. En consecuencia el Mercado Oligopolico responde a un Modelo de Demanda Quebrada de Sweezy con las siguientes funciones de Demanda y Costos:
$D(P)=25 – Q$ si $P>P^*$ y $D(P)=12 – 0.33P$ si $P<P^*$ y $C(Q)=10Q$.
Donde P* es el precio vigente en el mercado actualmente. Calcule las cantidades que maximizan beneficios para la empresa.

14.- Sobre Mercado de Insumos

i. Suponga una empresa que vende su Producto *Q* en una ***Industria Perfectamente Competitiva*** y que adquiere Factor Productivo L en un ***Mercado de Competencia Perfecta*** también. Determine las condiciones de Optimalidad que debe cumplir la cantidad óptima a adquirir por la firma. Para ello suponga que la misma opera con un función de producción genérica *Q=Q(L)* y que el precio del producto *Q* es *P* y el precio de L es *w*. (Ayuda: Plantee la función de Beneficios de la Firma en función de L, aplique las condiciones de Primer y Segundo Orden, interprete en términos económicos y Grafique).

ii. Obtenga las ***Función de Demanda de Factor L*** para una empresa con características idénticas a la del ejercicio anterior pero con funciones de Producción: $Q=L^{0.5}$. Grafique aproximadamente la función de demanda para P=5. Indique como se desplaza la demanda ante cambios en el precio del producto. Grafique

iii. Con la información del ejercicio anterior calcule el ***Valor del Producto Marginal***, explique que significa tal concepto.

iv. Suponga ahora que la misma firme posee dos insumos productivos: L y K, con lo que la nueva función de producción es ahora:

$$Q(L,K) = L^{0.5}\bar{K}^{0.3}$$

pero que el stock de Capital K, está fijo en 10 unidades. Considere que el precio de cada unidad de Capital es de 7 pesos. En base a ello se calcule las nuevas funciones de demanda como una función de P y w. Grafique.

v. Idem que el anterior pero para stock de capital de 20 y 30 unidades.

vi. Idem que apartado iv) pero para un stock de capital genérico K. De esta manera halle un función de demanda de *L* que dependa de **P**, **w** y **K**.

vii. Suponga ahora que la empresa está en el Largo Plazo por lo que el nivel de K no está fijo y por lo tanto la nueva función de beneficios a maximizar depende ahora de dos factores, *L* y *K*. Suponga además que el precio de cada unidad de Capital es r. Halle las funciones de Demanda de insumos K y L que dependen ahora de ***w***,***r*** y ***P.***

viii. Compare las funciones de Demanda de L que obtuvo en el apartado iv) (cuando el stock de capital estaba fijo) con la que obtuvo en el apartado vii) para P=5 y r=7. Grafique. Explique cual de las dos es más elástica y porqué.

ix. Explique porqué la ***Demanda de la Industria*** de L no puede determinarse por la simple suma de las demandas de cada una de las firmas que operan bajo Competencia Perfecta tanto en el mercado del producto como del insumo. En base a esa nueva reflexión determine la verdadera la función de Demanda de la Industria de L haciendo los ajustes correspondientes. Para ellos trabaje con los datos de la función de producción provistos en el apartado ii) y suponiendo que la demanda del Mercado del Producto Q es Q=100 – 3P y que la cantidad de firmas que demandan L en la Industria es 50000. Grafique aproximadamente la verdadera demanda de Ly la demanda que resulta solo de sumar las demandas de cada firma en un mismo gráfico. Compare sus elasticidades. Interprete.

x. Continuando con los datos referidos a la demanda del producto Q y de la función de producción del apartado anterior, suponga ahora que la empresa es ahora un monopolio en el mercado del Producto y continúa actuando en un mercado perfectamente competitivo en el mercado del Insumo L cuyo precio es *w*. En base a ello calcule la demanda maximizadora de Beneficios de L. Grafique.

xi. Suponiendo una empresa con las características descriptas en el apartado anterior, determine las condiciones de optimalidad que debe cumplir la cantidad a contratar por la misma. Para ello utilice la información cualitativa que proveen las condiciones de Primer y segundo Orden. Utilice funciones genéricas. Interprete.

xii. ***Defina Ingreso Marginal del Factor*** o ***Ingreso del Producto Marginal*** en términos conceptuales primero y analítico después. Para ello utilice funciones de Demanda genéricas del Tipo Q=Q(P), Demandas Inversas
$P^{-1}(Q)$ y funciones de Producción Q=Q(L). Demuestre que Ingreso Marginal del Factor es igual al Producto Marginal por el Ingreso Marginal. De allí su nombre alternativo.

xiii. Siguiendo el mismo estilo del ejercicio anterior demuestre que para toda función de demanda y de producción se verifica que el ***Ingreso Marginal del Factor*** o ***Ingreso del Producto Marginal*** es siempre menor que el Valor del producto Marginal. Explique conceptualmente porqué. Haga referencia a los efectos precio – cantidad.

xiv. Siguiendo con los datos del ejercicio xi) suponga que el valor de w es igual a 6 pesos. En base a ello calcule la cantidad a contratar por la empresa. Calcule y defina además ***Explotación Monopolística***. Grafique.

xv. Demuestre que una empresa monopolística en el mercado del Producto siempre contrata menos Insumos Productivos que una empresa que actúa bajo competencia perfecta. Utilice datos genéricos.

xvi. Suponga un individuo cuyas preferencias se describen por medio de la siguiente función de Utilidad:

$$U(X,L) = 70X(24-L)$$

donde X representa la cantidad consumida de un Bien *X* y *L* la cantidad de Trabajo ofrecida. Suponga además que éste individuo obtiene Ingresos de la venta de sus servicios laborales *L* a un precio *w* por unidad y de rentas fijas (alquileres de Capital fijos en el corto plazo, etc) representadas por una cantidad constante *rK.* El precio del producto se supone igual a *Px.*

En base a ello obtenga las funciones de Demanda del bien X y la función de

Oferta del Insumo L. Grafique la Oferta de L del Individuo para un $Px=5$. Analice los efectos sobre la misma ante un cambio de Px. Grafique e interprete.

xvii. Suponga que existen 50000 individuos idénticos al anterior. Calcule analíticamente la función de ***Oferta de la Industria de L***.

xviii. Suponga una empresa que vende su Producto Q en una ***Industria Perfectamente Competitiva*** y que adquiere Factor Productivo L en un ***Mercado Monopsónico*** es decir es la única demandante de ese factor en el Mercado. Determine las condiciones de Optimalidad que debe cumplir la cantidad óptima a adquirir por la firma. Para ello suponga que la misma opera con una función de producción genérica $Q=Q(L)$ y que el precio del producto Q es P y la función inversa de Oferta de la Industria es $w= w(L)$. (Ayuda: Plantee la función de Beneficios de la Firma en función de L teniendo en cuenta que el precio del factor varía con su el nivel de contratación, aplique las condiciones de Primer y Segundo Orden, interprete en términos económicos y Grafique).

xix. Obtenga las cantidades óptimas a contratar y el salario a pagar por una empresa con características idénticas a la del ejercicio anterior pero con funciones de Producción: $Q=L^{0.5}$.y función de Oferta de la Industria de $L = 5 + 3w$ Grafique aproximadamente para P=5. Indique como se modifican las cantidades de contratación de L al modificarse el precio del producto. Grafique.

xx. Con la información del ejercicio anterior calcule el ***Costo Marginal del Factor***, descomponiéndolo en ***Efecto Precio*** y ***Efecto Cantidad***. Explique que significan tales conceptos.

xxi. Utilizando funciones genéricas como en el apartado xviii) demuestre que el Costo Marginal del Factor es siempre mayor que la Función Inversa de Oferta de la Industria. En base a ello demuestre además que las cantidades contratadas en mercados Monopsónicos son siempre ***menores*** que las contratadas en Mercados Perfectamente Competitivos.

xxii. Defina ***Explotación Monopsonística*** y calcúlela analíticamente con los datos del ejercicio xix).

xxiii. Suponga una empresa que vende su Producto Q en una ***Industria Monopólica***, es decir es el único vendedor de ese bien, y que adquiere Factor Productivo L en un ***Mercado Monopsónico*** es decir es la única demandante de ese factor en el Mercado. Determine las condiciones de Optimalidad que debe cumplir la cantidad óptima a adquirir por la firma. Para ello suponga que la misma opera con una función de producción genérica $Q=Q(L)$ y que la función Inversa de Demanda del Producto Q es $P=P(Q)$ y la función inversa de Oferta de la Industria es $w= w(L)$. (Ayuda: Plantee la función de Beneficios de la Firma en función de L teniendo en cuenta que el precio del factor varía con su el nivel de contratación, aplique las condiciones de Primer y Segundo Orden, interprete en términos económicos y Grafique).

xxiv. Obtenga las cantidades óptimas a contratar y el salario a pagar por una empresa con características idénticas a la del ejercicio anterior pero con funciones de Producción: $Q=L^{0.5}$, función de Demanda $Q=100-2P$ y función de Oferta de la Industria de $L = 5 + 3w$. Grafique e interprete.

xxv. Con los datos anteriores calcule las ***Explotaciones Monopolística y Monopsonistica***.

xxvi. En base a los datos consignados en el apartado anterior suponga que la curva de Oferta de la Industria corresponde a un único individuo por lo que el mercado se vuelve Monopolista en cuanto a la Oferta y Monopsonista en cuanto a la demanda. Se trata pues de un caso de ***Monopolio Bilateral***. Calcule las cantidades a contratar y el rango en donde se producirán conflictos de negociación entre ambos agentes.

14.- Sobre Equilibrio General Competitivo

i. Repase el concepto de ***Circuito Económico Simple*** con sólo dos sectores: Consumidores y Empresas. Analice detenidamente los flujos reales y monetarios mostrando como los mismos generan interdependencias entre los sectores que se transmiten a los mercados de Bienes y de Factores a través de los ***Precios***. Dichas interdependencias culminan con el equilibrio simultáneo de ambos Mercados, situación que se denomina ***Equilibrio General de la Economía.*** Explique como se generan las interdependencias en ambos Mercados.

ii. Suponga una economía descripta por[4] dos tipos de Consumidores: Consumidores del Tipo 1 y Consumidores del Tipo 2, cuyas funciones de Utilidad se describen con el subíndice 1 y 2 respectivamente. Se sabe además que existen 1000 individuos del tipo 1 y 800 del tipo 2.A su vez existen dos bienes X e Y producidos por dos Tipos de Empresas con funciones de producción X e Y. Hay 500 empresas que producen X y 700 que producen Y. La propiedad de las empresas que producen y venden X corresponden a los individuos tipo 1 en forma igualmente proporcional. La empresa que producen y venden Y son de propiedad de los individuos tipo 2 en forma proporcional e igual. A continuación se especifican tales funciones:

$$U_1(X,Y,L) = 15XY(24-L)$$
$$U_2(X,Y,L) = 8XY(14-L)$$
$$X = L^{0.5}$$
$$Y = 3L^{0.3}$$

En base a ello se pide:

a. Realice un mapa conceptual por medio del Circuito Económico Simple, en donde ubique los agentes que intervienen en este ejercicio, los flujos monetarios y de bienes, los mercados de los productos X e Y y de los las interrelaciones que se producen entre cada uno de ellos.

b. Obtenga la demanda de *L* de las empresas que producen *X* y de las que producen *Y*.

c. Calcule la demanda total de la industria de L sumando de manera ponderada las demandas anteriores por el número de cada tipo de firmas.

d. Calcule la Oferta de X e Y de cada empresa reemplazando el valor optimo de L (es decir la función de demanda) en la función de Producción respectiva de cada firma..

e. Obtenga la Oferta total de la Industria de cada Bien multiplicando las ofertas anteriores por el numero de firmas.

---

[4]Éste ejercicio es de carácter avanzado y su resolución completa se reserva para alumnos del ciclo superior de la Licenciatura en Economía. Los restantes alumnos sólo deben concentrarse en los planteos algebraicos y conceptuales de éstos tópicos a modo de “ilustrar” el Circuito Económico Simple con ecuaciones. De esta manera, podrán visualizar a grandes rasgos el significado e importancia del Equilibrio General de una economía. Percibirán así, de una manera concreta, las interrelaciones entre Mercados y Agentes a través de los precios y las conductas optimizadotas de cada uno de ellos.

f. Obtenga la función de Beneficios Indirecta (función de beneficios que resulta de reemplazar L por su valor óptimo, es decir la demanda) de las firmas que producen X y las que producen Y.

g. Obtener las funciones de demanda de los bienes X e Y para ambos consumidores suponiendo que ambos obtienen Ingresos de la venta de sus servicios laborales *L* a un precio *w* por unidad, de su participación en los beneficios de las empresas (la cual serán 1000/500 de los beneficios[5] de la empresa que producen X para los individuos del tipo 1 y de 700/800 de los beneficios de las empresas que producen Y para los individuos tipo 2. El precio de los bienes X e Y se supone iguales a *Px* y *Py* respectivamente. Observe que las 4 funciones de demanda dependen de *Px, Py,* y *w*.

h. Suponga que existen 1000 individuos del tipo 1 y 800 del tipo 2. Calcule la demanda de las Industrias X e Y. Para ello sume las demandas de X de ambos individuos ponderándolas por las cantidades de cada uno. Ídem para el bien Y.

i. Calcule del mismo problema de optimización la Oferta de L de ambos individuos. Calcule luego la oferta de la Industria de L.

j. Forme un sistema de 3 ecuaciones (una para cada mercado: X, Y y L) y tres incógnitas (Px, Py, w), donde el lado derecho de cada ecuación es la Demanda de la Industria y el derecho la Oferta total de la Industria en cuestión.

k. El vector de precios que resuelve ese sistema, es el vector de precios que equilibra simultáneamente todos los mercados de la economía. Ese vector de precios se utilizará para saber cuanto consume cada individuo de cada bien, cuanto ofrece cada individuo de trabajo, cuanto produce cada empresa de cada bien, etc. Reflexione sobre tal concepto de equilibrio simultáneo en donde detrás de cada ecuación de oferta y demanda se encuentran agentes optimizadores de su propio bienestar.

iii. Defina y calcule la Eficiencia en el Sentido de Paretto en el consumo y en la producción. Utilice las Cajas de Edgeworth.

iv. Explique conceptual y analíticamente porqué los Mercados Competitivos son eficientes en el sentido de Paretto en ausencia de Externalidades.

[5] Tales beneficios fueron calculados en el inciso f) de éste ejercicio.

Apéndice:

OPTIMIZACIÓN ESTÁTICA MULTIVARIANTE

Optimización Libre

Caso 2 variables:
En este problema el objetivo consiste en determinar los valores de x_1 y x_2 que hacen máximo o mínimo el valor de una función objetivo *f*. Formalmente el problema puede escribirse de la siguiente manera:

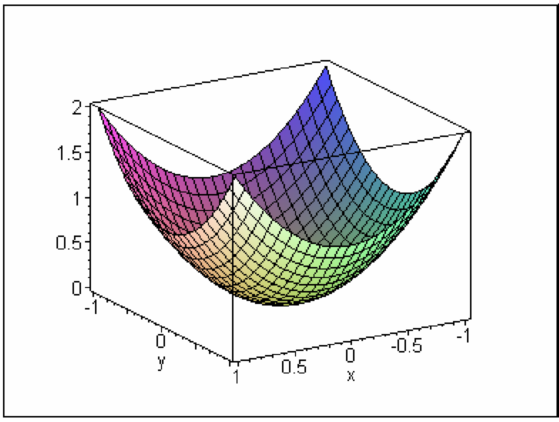
$$\boxed{\underset{x_1, x_2}{Max}\ f = f(x_1, x_2)}$$

Donde la condición de primer orden (condición necesaria) viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones[6]:

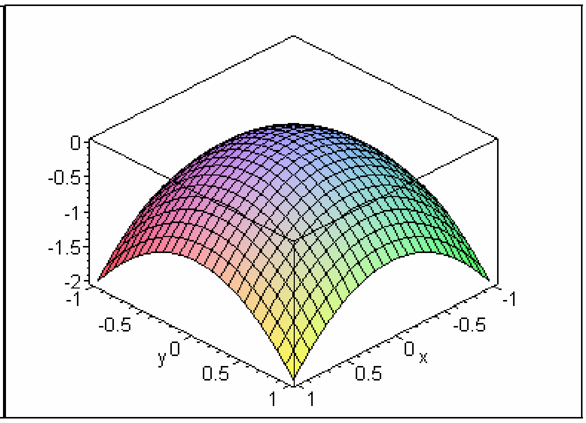
$$\left\{\begin{array}{l} f_{x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow (x_1^*, x_2^*)$$

Geométricamente la condición de primer orden establece que hay que buscar los valores de las variables, es decir el punto del dominio para el cual el plano tangente a la gráfica de *f* es horizontal. Dicho sistema por lo general es no lineal y puede tener varias soluciones, es decir pueden existir varios puntos para los cuales el plano tangente a la gráfica de *f* es horizontal. Dichos puntos son denominados puntos críticos o candidatos a óptimos de *f*. ya que los puntos donde *f* presenta plano tangente horizontal pueden ser máximos, mínimos o puntos de inflexión (puntos de silla) como se aprecian en las siguientes gráficas:

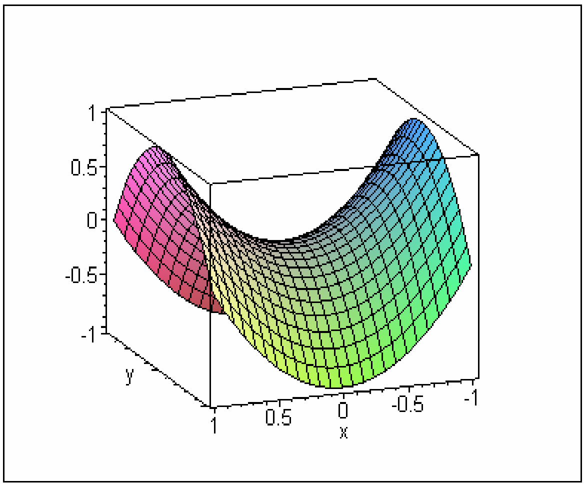
[6] Donde $f_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_1, x_2, ...x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ...x_i, ..., x_n)}{h}$



Mínimo en *(x,y)=(0,0)*



Máximo en *(x,y)=(0,0)*



Punto de silla en *(x,y)=(0,0)*

Para dicha distinción la condición de segundo orden (condición suficiente) hace referencia a la matriz hessiana (matriz de derivadas segundas) evaluada en cada punto crítico:

$$\mathbf{H}_f(x_1^*, x_2^*) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_1^*, x_2^*) & f_{x_1x_2}(x_1^*, x_2^*) \\ f_{x_2x_1}(x_1^*, x_2^*) & f_{x_2x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix}$$

Dicha matriz provee toda la información necesaria de f en las inmediaciones de cada punto por medio de una aproximación de Taylor de segundo orden en el sentido de que avisa si el entorno del punto es cóncavo o convexo. Algebraicamente, para discernir si cada punto crítico es efectivamente un punto que optimiza a f se hace referencia la concepto de menores principales de orden n asociado a una matriz cuadrada de orden m (m >= n). Un menor principal de orden n asociado a una matriz de orden m es el determinante que surge de considerar una submatriz de orden n conformada por las primeras n filas y las primeras n columnas. Con esta definición la condición de segundo orden se puede enunciar en términos de los menores principales de la matriz hessiana evaluada en cada punto crítico. En efecto:

$$Mínimo\begin{cases}|\mathbf{H}_1|>0\\|\mathbf{H}_2|>0\end{cases}\qquad Máximo\begin{cases}|\mathbf{H}_1|<0\\|\mathbf{H}_2|>0\end{cases}$$

Es decir para que efectivamente un punto crítico (que satisface la condición de primer orden) sea un máximo local de *f* es suficiente que los menores principales[7] asociados a la matriz hessiana evaluada en el punto crítico en cuestión alternen en signo empezando por signo negativo. Para el caso de un mínimo se requiere que todos sean positivos.

Caso n variables:

En esta situación el problema se presenta como:

$$\boxed{\underset{x_1,x_2,\ldots,x_n}{Max}\ f=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

donde ahora la condición de primer orden viene dada por es siguiente sistema de n ecuaciones:

$$\begin{cases}f_{x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\\f_{x_2}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\\\vdots\\f_{x_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\end{cases}\quad\Rightarrow(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$$

Donde al igual que en el caso anterior el sistema es no lineal y puede presentar múltiples soluciones. Cada una de ellas será un punto crítico y para decidir si dichos puntos son o no valores óptimos se recurre a analizar el signo de los menores principales de la matriz hessiana evaluada en cada punto critico:

$$\mathbf{H}_f(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)=\begin{pmatrix}f_{x_1x_1}(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)&\cdots&f_{x_1x_n}(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)\\\vdots&\ddots&\vdots\\f_{x_nx_1}(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)&\cdots&f_{x_nx_n}(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)\end{pmatrix}$$

En esta situación, para el caso de mínimo, es suficiente que todos los menores principales sean positivos mientras que para el caso de máximo, se requiere que alternen en signo comenzando por signo negativo. Algebraicamente se tiene:

$$Mínimo\begin{cases}|\mathbf{H}_1|>0\\|\mathbf{H}_2|>0\\\vdots\\|\mathbf{H}_n|>0\end{cases}\qquad Máximo\begin{cases}|\mathbf{H}_1|<0\\|\mathbf{H}_2|>0\\\vdots\\(-1)^n|\mathbf{H}_n|>0\end{cases}$$

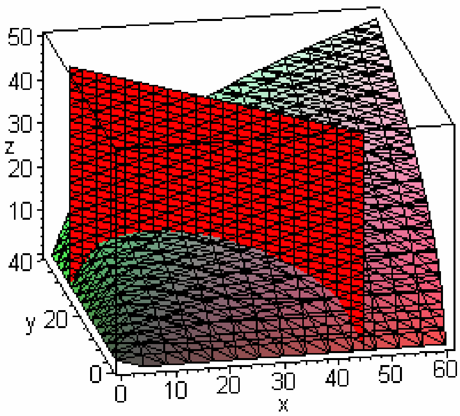
[7] Donde $|\mathbf{H}_n|$ denota al menor principal de orden *n* de la matriz $\mathbf{H}$

Optimización Restricciones de Igualdad

Caso 2 variables y una restricción:
Este tipo de problema consiste en hallar los valores de x_1 y x_2 que perteneciendo a una curva del dominio ($g(x_1, x_2) = m$) confieran a f un valor máximo o mínimo.
Formalmente este problema puede escribirse de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{x_1,x_2}{Max}\ f = f(x_1,x_2) \\ st:\quad g(x_1,x_2) = m \end{array}}$$

Geométricamente el problema puede visualizarse en la siguiente gráfica:



En dicha grafica se presenta una restricción del tipo lineal (*g(x,y)* es una relación lineal) sobre el dominio (plano x,y). Para entender el problema se procedió a cortar la gráfica de *f* con un plano vertical (en color rojo) que emerge sobre la curva de restricción (en este caso una recta). De la intersección de dicho plano con la superficie generada por *f* surge una curva que es la que hay que maximizar. Esa curva, que nace de la intersección de *f* con el plano de restricción, constituye los valores de *f* para los puntos que cumplen con la condición *g(x,y)=m.* En consecuencia, el problema consiste en hallar las coordenadas *(x,y)* que posadas sobre dicha curva confieran a *f* un valor máximo (o mínimo).

Para su resolución se hace uso de la función Lagrangeana (*L*) y de los multiplicadores de Lagrange (λ) como sigue:

$$\underset{x_1,x_2}{Max}\, L = f(x_1,x_2) + \lambda[m - g(x_1,x_2)]$$

La condición de primer orden ahora se escribe en términos de la función Lagrangeana y arroja el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 0 \\ L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 0 \Rightarrow (x_1^*, x_2^*, \lambda^*) \\ L_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Al igual que en los otros casos las ecuaciones pueden resultar ser no lineales y con soluciones múltiples. Cada una de dichas soluciones constituye un punto crítico que luego deberá verificar las condiciones de segundo orden. En este caso se recurre a una matriz hessiana de la función Lagrangeana orlada con ceros y evaluada en cada punto crítico. Luego sobre estas matrices se toman los menores principales:

$$\overline{\mathbf{H}}_L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} 0 & g_{x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) & g_{x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) \\ g_{x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) & L_{x_1x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) & L_{x_1x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) \\ g_{x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) & L_{x_2x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) & L_{x_2x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) \end{pmatrix}$$

$$\textit{Mínimo: } |\mathbf{H}_3| < 0 \qquad \textit{Máximo: } |\mathbf{H}_3| > 0$$

Como se aprecia los menores principales se toman a partir del orden tres por lo que en definitiva solo hay que atender al signo del determinante de la matriz hessiana orlada evaluada en cada punto crítico.

Caso n variables y m restricciones (m < n)

Similarmente al caso planteado con anterioridad, el problema consiste en hallar un punto n dimensional (es decir los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$) tales que satisfaciendo un conjunto de restricciones (siempre menor al número de incógnitas) confieran a f un valor máximo o mínimo. Formalmente el problema se traduce a:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{Max} & f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ st: & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m_1 \\ & g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m_2 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m_m \end{array}}$$

Nuevamente se plantea la función Lagrangeana que ahora se generaliza de la siguiente manera:

$$\underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{Max} L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1[m_1 - g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)] + \lambda_2[m_2 - g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)] + \cdots + \lambda_m[m_m - g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

Mientras que la condición de primer orden arroja el siguiente sistema de $n + m$ ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} L_{x_1}(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,...\lambda_m)=0 \\ L_{x_2}(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,...\lambda_m)=0 \\ \vdots \\ L_{x_n}(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,...\lambda_m)=0 \\ L_{\lambda_1}(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,...\lambda_m)=0 \\ L_{\lambda_2}(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,...\lambda_m)=0 \\ \vdots \\ L_{\lambda_m}(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,...\lambda_m)=0 \end{array}\right. \Rightarrow (x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_m^*)$$

Las soluciones para dicho sistema constituyen los puntos críticos candidatos a extremos relativos (máximos o mínimos) de la función sujeta a las restricciones. A continuación, se debe recurrir a la matriz hessiana orlada que para el caso de *m* restricciones adopta la siguiente forma en términos matriciales:

$$\bar{\mathbf{H}}_L(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda_1^*,...\lambda_m^*)=\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m\,x\,m} & \mathbf{g_X}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda_1^*,...\lambda_m^*)_{m\,x\,n} \\ \mathbf{g_X}^T(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda_1^*,...\lambda_m^*)_{m\,x\,n} & \mathbf{H}_L(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda_1^*,...\lambda_m^*)_{n\,x\,n} \end{pmatrix}$$

donde:

$\mathbf{0}_{m\,x\,m}$ es una matriz cuadrada de ceros de orden *m x m*

$$\mathbf{g_X}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda_1^*,...\lambda_m^*)_{m\,x\,n}=\begin{pmatrix} g^1{}_{x_1}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda_1^*,...\lambda_m^*) & \dots & g^1{}_{x_n}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda_1^*,...\lambda_m^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^m{}_{x_1}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda_1^*,...\lambda_m^*) & \cdots & g^m{}_{x_n}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda_1^*,...\lambda_m^*) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{g_X}^T(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,\lambda_1^*,...\lambda_m^*)_{m\,x\,n}$ es la transpuesta de la matriz anterior

Una vez obtenida la matriz hessiana orlada se debe atender al signo de los menores principales a partir del orden *2 m +1*. Para el caso de mínimo se requieren que todos tengan el signo de $(-1)^m$ y para máximo se requiere que los menores alternen en signo comenzando por el signo de $(-1)^{m+1}$.