Optimización Dinámica: Cálculo de Variaciones - Aplicaciones en Economía e Implementaciones en Maple y Mathematica

Jorge Mauricio Oviedo [1]

Resumen: El presente trabajo tiene por objetivo integrar los principios matemáticos de la teoría del Cálculo de Variaciones y el control Óptimo con programaciones computacionales en Softwares algebraicos. Para llevar a cabo dicha tarea se presenta una revisión teórica de tales tópicos de una manera clara y accesible sin por ello perder rigurosidad en su tratamiento. Se brindan además rutinas de programación en Mathematica 5.2 y Maple 10 que automatizan la tarea de resolución de dichos problemas. De esta manera, se logra cumplir el fin de fomentar el uso de tales métodos cuantitativos minimizando el esfuerzo de aprendizaje y resolución. Aplicaciones a la Teoría Económica son incorporadas adicionalmente

Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales, Calculo de Variaciones, Control Óptimo, Optimización, Ecuación de Euler, Condiciones de Transversalidad.

[1] joviedo@eco.unc.edu.ar

1.- Motivación

A lo largo de la vida uno aprende a valorar la utilidad de realizar planes para el futuro. Las decisiones presentes afectan las posibilidades de elección futura haciendo que ciertas oportunidades estén o no dentro del rango de elección más adelante. De esta manera las elecciones presentes afectan nuestro bienestar a los largo de todo ese horizonte de planeación.
Sin embargo, la cuestión clave que emerge de esta reflexión es la interdependencia de las decisiones presentes y futuras. De no ser así, el problema planeación a lo largo del tiempo es trivial en el sentido que todo lo que uno necesita hacer es elegir lo mejor en cada instante del tiempo sin importar las repercusiones de tal decisión en el futuro.
Transcribiendo estas ideas de una manera algebraica podemos decir lo siguiente:
En un problema de optimización estática el objetivo es hallar el valor de una variable que maximice una cierta función, es decir:

$$\max_{x} \; F(x) \tag{a}$$

si dicha función es continuamente diferenciable se verificará que $F'(x^*)=0$ donde x^* es un valor que maximiza F.
Una generalización hacia un problema de múltiples periodos discretos involucra la elección de ciertas cantidades x_t

$$\max_{x_t} \; \sum_{i=1}^{n} F(t, x_t) \tag{b}$$

Siguiendo con el supuesto de que F es continuamente diferenciable se tendrán las siguientes condiciones necesarias de primer orden:

$$\begin{aligned} F_{x_1}(1, x_1) &= 0 \\ F_{x_2}(2, x_2) &= 0 \\ &\vdots \\ F_{x_N}(N, x_N) &= 0 \end{aligned}$$

De donde emerge claramente que dicho sistema de ecuaciones no denota ningún tipo de interdependencias por lo que cada ecuación puede ser resuelta independientemente de las demás. De esta manera, el problema es trivial y no marca ningún tipo de dinámica en la elección de las variables. Obsérvese como éstas reglas algebraicas coinciden con las reflexiones hechas en párrafos anteriores.

El problema se transforma verdaderamente dinámico cuando las decisiones presentes no solo afectan este instante si no también el futuro venidero. Algebraicamente sería el caso de:

$$\max_{\{x_t\}_{t=1}^{N}} \sum_{i=1}^{n} F(t, x_t, x_{t-1}) \qquad \text{(c)}$$

luego las condiciones de primer orden serán:

$$\begin{aligned} F_{x_1}(1, x_1, x_0) + F_{x_1}(2, x_2, x_1) &= 0 \\ F_{x_2}(2, x_2, x_1) + F_{x_2}(3, x_3, x_2) &= 0 \\ &\vdots \\ F_{x_{N-1}}(t-1, x_{N-1}, x_{N-2}) + F_{x_{N-1}}(t, x_N, x_{N-1}) &= 0 \\ F_{x_N}(N, x_N, x_{N-1}) &= 0 \end{aligned}$$

Nótese como el valor de $\boldsymbol{x_0}$ debe ser fijado de antemano par determinar el valor de $\boldsymbol{x_1}$. Se aprecia con nitidez la interdependencia del sistema periodo a periodo. Las variables no pueden elegirse independientemente una de otras. Estamos pues frente a un problema de optimización dinámico.

Para generalizar los problemas (c) y (d) al caso de horizonte de planeación continúo se deben hacer algunas consideraciones previas:
Primero téngase presente que el análogo continuo a la sumatoria es una integral y en segundo lugar que la solución óptima será una función continua de t, ***x(t),*** en reemplazo de la secuencia de valores anterior:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}(t)}{Max} \int_0^{t_1} F(\mathbf{x}(t), t)\,dt \\ &\text{sujeto a} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Al igual que en (c) el mismo resulta ser no dinámico dado que el integrando solo depende de las elecciones contemporáneas de *x*. Para lograr el equivalente dinámico de un problema en horizonte temporal continuo, se debe hacer aparecer una derivada de la variable de elección en el integrando. Dicho dependencia de la tasa de crecimiento es el puente que comunica íntertemporalmente las decisiones tomadas transmitiendo así dinámica al sistema continuo.

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}(t)}{Max} \int_0^{t_1} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), t)\,dt \\ &\text{sujeto a} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Las condiciones necesarias para resolver esta clase de problemas se brindarán en las próximas secciones.

2.- Ecuación de Euler

Comencemos por tratar el más sencillo de los casos de Optimización dinámica. Para ellos consideremos primero el siguiente problema:

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{Max} \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), t)dt \qquad (1)$$

$$\text{sujeto a} \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$$

Es decir se pretende hallar una función $x(t)$ de modo tal que la integral del Funcional $F(.)$ sea máxima sujeto a las condiciones iniciales y terminales fijadas, x_0 y x_1 **.** Cualquier función $x(t)$ continuamente diferenciable en $[t_0, t_1]$ que satisfaga las condiciones iniciales y terminales se dice una ***función admisible*** **.**[2]

Se asume que F es continua en sus tres argumentos y tiene derivadas parciales continuas con respecto a x y a x'.

Para esbozar una demostración de las condiciones necesarias que una función debe satisfacer para resolver éste problema, seguiremos éste plan:

a) Con el objetivo de transformar esta optimización funcional en una optimización de variable común, se tratará de condensar todo el espacio de funciones admisibles en el espacio de una variable (**R**) de modo tal que en un determinado valor de la variable se alcance el óptimo.
b) En base a las condiciones necesarias para optimizar funciones de una variable se logrará desenmascarar ciertas condiciones para la optimización de funcionales como en el problema planteado

Para llevar a cabo esta idea, se parte de la idea que existe una función $x^*(t)$ admisible que resuelve el problema en cuestión. A esta función le podemos llamar el camino o la trayectoria óptima en el sentido que maximiza la integral. En base a ésta función se procede a considerar una función arbitraria $h(t)$, llamada ***función perturbación***, con la siguiente propiedad:

$$h(t_0)= h(t_1)=0 \qquad (2)$$

Dicho pedido se efectúa con el fin de que la siguiente función perturbada sea admisible:

$$y(t) = x^*(t) + a\, h(t) \qquad (3)$$

para cualquier constante a. De ésta forma $y(t)$ cumple con las condiciones de admisibilidad gracias a (2). Nótese que cualquier función que satisfaga (2) tiene derecho a ser considerada función perturbación. Tal arbitrariedad en la definición de $h(t)$ cobrará vital importancia más adelante queriendo destacar con esto que tal arbitrariedad no es meramente caprichosa.

[2] (El caso de mínimo puede ser tratado como el problema de maximizar la integral de $-F(.)$

En base a éstas definiciones podemos ahora construir la siguiente función:

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_{t_0}^{t_1} F(y(t), y'(t), t)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F(x^*(t) + ah(t), x^{*\prime}(t) + ah'(t), t)dt \end{aligned}$$

la cual sólo depende de ***a.*** En consecuencia se puede hallar el valor de a que hace resuelve (1) siguiendo las reglas usuales de la optimización de funciones de una variable.
Ahora bien, dado que las definiciones de ***x*(t), h(t)*** y ***a*** se han hecho con la intención de que (1) se maximice en ***a=0***, se sabe por las condiciones necesarias de primer orden que:

$$g'(a) = 0 \tag{4}$$

debe verificarse para ***a = 0.***

Con esto se pueden ahora destilar las condiciones que deben cumplirse para que (1) se maximice pues hay que deducir las relaciones que deben verificarse entre F y sus argumentos para que ***g'(a) = 0*** teniendo en cuanta la arbitrariedad de ***h(t).*** En otras palabras, debemos deducir que relación debe observarse para que (4) evaluado en ***a=0*** se cumpla para cualquier función de perturbación admisible ***h(t)***.

Procedamos ahora a computar ***g'(a).*** Para computar tal derivada hay que tener en cuenta que estamos derivando bajo el signo integral, por ende se hace necesario utilizar la Regla de Leibnitz que dice lo siguiente:

Regla de Leibnitz: sea ***f(x,r)*** una función continua con derivadas continuas en ***r*** y sean además ***A(r)*** y ***B(r)*** funciones continuamente diferenciables. Si

$$V(r) = \int_{A(r)}^{B(r)} f(x,r)dx$$

Entonces

$$V'(r) = f[B(r),r]B'(r) - f[A(r),r]A'(r) + \int_{A(r)}^{B(r)} \left(\frac{\partial f(x,r)}{\partial r} \right) dx$$

Regresando a nuestro objetivo de calcular ***g'*** y teniendo en cuenta que los extremos de integración están fijos, se tiene que:

$$g'(a)=\int_{t_0}^{t_1}\left[F_x(x^*(t)+ah(t),x^*{}'(t)+ah'(t),t)\right]h(t)+\left[F_{x'}(x^*(t)+ah(t),x^*{}'(t)+ah'(t),t)\right]h'(t)dt$$

Evaluando en ***a=0***, ya que por construcción en dicho punto ***g'*** es cero, se tiene que:

$$g'(0)=\int_{t_0}^{t_1}\left[F_x(x^*(t),x^*{}'(t),t)\right]h(t)+\left[F_{x'}(x^*(t),x^*{}'(t),t)\right]h'(t)dt=0 \qquad (5)$$

La expresión (5) haciendo uso de la regla de integración por partes puede expresarme de manera más sencilla por:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[F_x(x^*(t),x^*{}'(t),t)-\frac{d}{dt}\left[F_{x'}(x^*(t),x^*{}'(t),t)\right]\right]h(t)dt=0$$

Dado que ***h(t)*** es una función de perturbación admisible ***arbitraria*** la única manera que dicha integral se anule es que el coeficiente que acompaña a ***h*** sea nulo para todo ***t*** en $[\mathbf{t_0},\mathbf{t_1}]$. Es decir debe verificarse con carácter de necesario la siguiente relación:

$$F_x(x^*(t),x^*{}'(t),t)-\frac{d}{dt}\left[F_{x'}(x^*(t),x^*{}'(t),t)\right]=0$$

La misma es una ecuación diferencial de segundo orden, en general no lineal, denominada ***Ecuación de Euler***[3]**.**

---

[3] En el caso de múltiples variables de elección la Ecuación de Euler puede deducirse de manera similar definiendo múltiples funciones de perturbación admisibles. El problema puede plantearse así:

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{Max}\, J[\mathbf{x}(t)]=\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}(t),\mathbf{x'}(t),t)dt$$

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1$$

donde:

$\mathbf{x}(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$

$\mathbf{x'}(t)=(x'_1(t),...,x'_n(t))$

En tal caso la ecuación de Euler puede escribirse como: $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}-\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x'}})=\mathbf{0}$

Nótese que el segundo término del lado izquierdo de la Ecuación de Euler denota la derivada total de $F_{x'}$. Expandiendo tal derivada se arriba a ésta expresión alternativa a la condición de Euler:

$$F_x = F_{x'x}x' + F_{x'x'}x'' + F_{x't}$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en ($\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x'}(t)$, t). Se ve claramente que la misma es una ecuación diferencial de segundo orden en $\boldsymbol{x}$ con coeficientes en general no lineales dados por las derivadas parciales de **F.** Dicha ecuación suele ser difícil en general de resolver por medios analíticos pero en la mayoría de los casos se puede analizar el comportamiento de la solución óptima de una manera cualitativa.

De esta manera la ecuación de Euler mas las condiciones iniciales-terminales permiten obtener una función que, en la medida que la condiciones de segundo orden se verifiquen, resolverá (1). Las soluciones de la Ecuación de Euler suelen denominarse "***extremales***" de (1) siendo esta denominación el análogo a los puntos estacionarios candidatos a óptimos en optimización de funciones de una variable.

2.- Condiciones de segundo orden:

En problemas de optimización una función $f(x)$ dos veces continuamente diferenciable en una simple variable sobre un intervalo abierto, es bien conocido que si x^* maximiza f es necesario que $f'(x^*)=0$ y $f''(x^*)\leq 0$. A su vez si x^* satisface $f'(x^*) = 0$ y $f''(x^*) < 0$, entonces x^* brinda un máximo local para f. De manera análoga, en los problemas variacionales como (1) se pueden deducir condiciones necesarias y suficientes para máximos locales de los funcionales.
Regresando a (3)

$$g'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x h + F_{x'} h' \right) dt = 0$$

ésta expresión es usualmente llamada ***primera variación***. El requerimiento que la misma sea cero cuando se la evalúa en el camino óptimo conduce a la ecuación de Euler.
En semejanza a la derivada segunda es posible obtener la ***variación segunda*** de g de la siguiente manera:

$$g''(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_{xx} h^2 + F_{xx'} hh' + F_{x'} h' \right) dt \qquad (6)$$

Observando el integrando se deduce que el mismo es una forma cuadrática en ($\boldsymbol{x, x'}$). Ahora bien, analizando (6) y teniendo en cuenta que si $\boldsymbol{x(t)}$ maximiza (1) se deducen las siguientes condiciones:

Condición Suficiente[4]: Si **x*(t)** satisface la Ecuación de Euler y a su vez se verifica que **F** es cóncavo en (***x, x'***), entonces ***x*(t)*** es un máximo local del problema (1).

Sin embargo esta condición suficiente es demasiado fuerte y no siembre se cumple en la mayoría de los problemas. Se tiene además la siguente,

Condición Necesaria (Legendre)[5]: si ***x*(t)*** es un máximo local del problema (1), entonces de verifica que **F** evaluado en la solución óptima es concavo en ***x'***

3.- Condiciones de Transversalidad

En los apartados anteriores se consideró el caso en que el estado inicial y terminal de la variable esta determinado y que el tiempo de finalización también estaba dado. En esta sección se consideraran casos más generales de tales condiciones terminales[6]:

Caso 1.- Estado terminal de la variable de elección libre y tiempo terminal dado

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{Max} \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), t)dt$$
$$\text{sujeto a} \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

Deben verificarse las siguientes Condiciones Necesarias:

a) Ecuación de Euler
b) Condición de Legendre
c) $\mathbf{F}_{\mathbf{x}'} = \mathbf{0}$ en t_1 final dado

Caso 2.- Estado terminal de la variable de elección fijo y tiempo terminal libre

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{Max} \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), t)dt$$
$$\text{sujeto a} \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 \quad y \quad t_1 \text{ libre}$$

Deben verificarse las siguientes Condiciones Necesarias:

---

[4] Esto es así ya que es necesario que la segunda variación sea negativa para toda función admisible ***h(t)***.

[5] Para derivar dicha condición deben efectuarse algunas manipulaciones en (6) y hacer uso de las condiciones de Euler y otros Lemas. Para mayores detalles de su deducción véase Kamien y Schwartz [1981]

[6] Las deducciones de tales alteraciones en el planteo inicial del problema (1) no se presentarán en este escrito. Para una deducción detallada de las mismas véase Kamien y Schwartz [1981]

a) Ecuación de Euler
b) Condición de Legendre
c) $\mathbf{F} - \mathbf{x}' \mathbf{F}_{\mathbf{x}'} = \mathbf{0}$ en t_1 final dado

Caso 3.- Estado terminal de la variable de elección y tiempo terminal (ambos) libres

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{Max} \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), t)dt$$

$$\text{sujeto a} \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad y \;\; t_1 \text{ libre}$$

Deben verificarse las siguientes Condiciones Necesarias:

a) Ecuación de Euler
b) Condición de Legendre
c) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en t_1 final
d) $\mathbf{F}_{\mathbf{x}'} = \mathbf{0}$ en t_1 final

Caso 4.- Estado terminal de la variable de elección y tiempo terminal relacionados por una función ***R.*** [7]

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{Max} \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), t)dt$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a} \qquad & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ & R(t_1) = x_1 \end{aligned}$$

Deben verificarse las siguientes Condiciones Necesarias:

a) Ecuación de Euler
b) Condición de Legendre
c) $\boldsymbol{F + (R' - x') F_{x'} = 0}$ en t_1

Caso 5.- Restricciones de desigualdad en las condiciones terminales

[7] Nótese que éste caso ni el tiempo terminal ni la variable de elección son completamente libres ni completamente fijos. Un cambio en uno de ellos debe ser acompañado en un cambio en el otro acorde a ***R***

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{Max}\int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{x}(t),\mathbf{x'}(t),t)dt$$

$$\text{sujeto a} \qquad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0, \qquad \mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1 \geq a$$

$$t_1 \leq T$$

Deben verificarse las siguientes Condiciones Necesarias:

d) Ecuación de Euler
e) Condición de Legendre
f) $T \geq t_1$, $F\text{-}x' F_{x'}$, $(T - t_1)(F - x' F_{x'}) = 0$ en t_1
g) $x_1 \geq a$, $F_{x'}(t_1) \leq 0$, $(x_1 - a) F_{x'}(t_1) = 0$

4.- Horizonte infinito de planeación[8]

Este nuevo problema puede formularse como:

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{Max}\, J[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_0}^{\infty} F(\mathbf{x}(t),\mathbf{x'}(t),t)dt$$

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$

siendo:

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$

$\mathbf{x'}(t) = (x'_1(t),...,x'_n(t))$

En donde ahora se trata de una integral impropia pues uno de sus límites es infinito. Como primer requisito se necesita que la misma sea convergente[9]. Para abordar este problema se recurre de nuevo a la ecuación de Euler junto a las condiciones iniciales y las siguientes condiciones de Transversalidad de acuerdo al tipo de finalización establecido:

$$\lim_{t\to\infty}(F - x'_i F_{x'_i}) = 0 \quad ; \; (i = 1,...,n)$$

Ésta condición de Transversalidad es necesaria independiente del tipo de finalización planteado. A su vez hay que añadir una condición de Transversalidad adicional dependiendo del tipo de finalización del problema. Así se tendrá que agregar:

---

[8] Para lograr mayor generalidad expositiva se procede a tratar el caso de múltiples funciones de elección. Al igual que en el apartado anterior se omiten las deducciones de las misma. Para el lector interesado en los detalles de las mismas puede consultar Alpha Chiang [1992]

[9] La necesidad de la convergencia de la integral obedece al hecho de que si no esto no sucediere pudieran existir demasiadas funciones candidatas a óptimo y decidir sobre ellas suele ser una tarea ardua y difícil

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{a}$$

en caso que el problema determine un valor fijo estable de la variable **x(t)**

Alternativamente si se permitiese a la variable $\mathbf{x}(t)$ variar libremente en el límite a infinito se requerirá agregar esta nueva condición de Transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} F_{x'_i} = 0 \quad ; \; (i = 1,...,n)$$

Por último, en el caso de que las variables estuviesen sujetas a un valor mínimo asintótico la condición será:

$$\lim_{t\to\infty} F_{x'_j} \geq 0 \qquad \lim_{t\to\infty} F_{x'_j}[x_j(t) - x_{j\min}] = 0 \qquad (j = 1,...n)$$

5.- Restricciones

En esta ampliación del problema el interrogante es hallar un conjunto de trayectorias que optimicen una integral definida (propia o impropia) sujeto a la condición de que cumpla con un conjunto de restricciones y relaciones entre las variables que deben ser satisfechas a lo largo de todo el horizonte de planeación. Existen diversos tipos de restricciones:

Restricciones Diferenciales de Igualdad

Formalmente el problema general puede plantearse como sigue:

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{Max}\, J[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x'}(t), t)dt$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x'}(t), t) = \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{g}(\cdots)$ es un vector columna dado de r funciones independientes[10] y consistentes y $\mathbf{b}$ un vector de constantes que igualados constituyen un conjunto de *r* ecuaciones diferenciales. En el caso de que $\mathbf{g}(\cdots)$ no dependa explícitamente de las derivadas se tratará de un conjunto de ecuaciones simples. Para que el problema sea factible se requiere que $r < n$ (el número de estricciones debe ser estrictamente menor que el número de variables

---

[10] La independencia funcional de estas ecuaciones puede verificarse con la siguiente condición necesaria y suficiente: $\left|\dfrac{\partial(g^1, g^2, ..., g^r)}{\partial(x'_1, x'_2, ..., x'_r)}\right| \neq 0$ para al menos un conjunto de *r* variables *x'* del total *n*

ya que si son iguales el campo de elección de las variables a la hora de optimizar la integral se restringe únicamente a un punto n-dimensional[11] dado por la solución del sistema $\mathbf{g}(\cdots) = \mathbf{b}$. Para resolver este problema se recurre nuevamente a la ecuación de Euler pero esta vez aplicada a un nuevo funcional. Para ello se definen previamente ***r*** multiplicadores de Lagrange:

$$\mathbf{y} = (y_1(t), y_2(t), ...; y_r(t))$$

Donde el nuevo funcional[12] es ahora:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{x'}, \mathbf{y}, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x'}, t) + \mathbf{y}[\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x'}, t)]$$

Lo que lleva a la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x'}}) = \mathbf{0}$$

El cual es un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias con *n + r* funciones incógnitas que junto a las otras *r* ecuaciones diferenciales dadas por las r restricciones y las condiciones de contorno (iniciales y terminales) permiten hallar explícitamente la solución del problema.
Si además se establecen condiciones de transversalidad ante la ausencia de valores terminales fijos, los mismos serán reemplazados por los siguientes requerimientos de acuerdo a los distintos casos:

a) $[L_{\mathbf{x'}}]_{t=t_1} = \mathbf{0}$
b) $[L - y_i L_{y_i'}] = 0 \qquad (i = 1, ..., n)$
c) $[L - (T' - y'_i) L_{y'}]_{t=t_1} \quad (i = 1, ..., n)$

Restricciones Diferenciales de Desigualdad

En el caso que las restricciones sean de desigualdad el problema se transforma en

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{Max}\, J[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x'}(t), t) dt$$
$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x'}(t), t) \leq \mathbf{b}$$

[11] Punto n-dimensional cuyas componentes son funciones
[12] Este nuevo funcional suele denominarse función de Euler-Lagrange

y la solución del mismo deberá satisfacer:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}'}\right) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, t) \leq \mathbf{b}$$

junto a

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{y}[\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)] = 0$$

Restricciones Isoperimétricas

El último tipo de restricciones que se pueden considerar son las llamadas restricciones de perímetro. Este tipo de requerimientos surgen en problemas donde el objetivo es hallar una curva que encierre la mayor superficie posible sujeto a que el perímetro de tal curva es fijo. Analíticamente el problema sería:

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{Max}\ J[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), t)dt$$
$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$$
$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), t)dt \leq \mathbf{b}$$

para abordar este tipo de problemas se procede a utilizar un multiplicador d elagrange y obtener este nuevo funcional:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), t) - \lambda G(x(t), x'(t), t) \right] dt$$

a éste nuevo funcional se le aplica la ecuación de Euler y mas la restricción de isoperimetría se logra un sistema de ecuaciones del cual es posible hallar la solución óptima de ***x(t)*** y ***λ(t)***[13]

6.- Ejemplos y Aplicaciones

Básicamente en materia de ejemplos y aplicaciones del Cálculo de Variaciones, podemos destacar dos tipos de los mismos:

[13] Esto es posible en la medida que ***x(t)*** no sea una extremal para la restricción integral ***G***

Ejercicios de carácter cuantitativo: que partiendo de datos explícitos en particular buscan resolver un problema concreto, determinado y específico

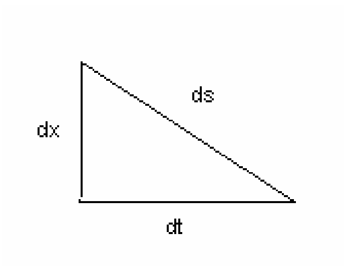
Ejercicios de carácter cualitativo: éstos en base a datos generales en donde no se especifican ni se detallan los datos del problema de manera explicita si no simplemente se confieren ciertas caracteres generales, comunes a un amplio rango de problemas parecidos, buscan encontrar patrones de solución comunes a todos ellos. En economía es ampliamente usado este tipo de aplicaciones en donde por ejemplo el investigador no persigue determinar la trayectoria óptima de consumo para un agente determinado que posee unas preferencias explicitas y particulares, si no que conociendo ciertas características en común de todos los agentes, se trata de determinar los patrones de conducta comunes a todos ellos en su trayectoria óptima. Esto es de gran importancia pues simplemente con saber ciertas cualidades de las funciones de Utilidad o producción de los agentes y firmas, es posible en muchos casos develar el esquema común de comportamiento de los agentes sin necesidad de conocer con exactitud tales funciones.

A continuación mostramos ejemplos de cada una de ésas clases de problemas:

Ejemplo a

Determinar la distancia mas corta entre un punto ***(a, A)*** *y una línea vertical* ***(b, t)*** *para todo* ***t*** *perteneciente a* ***R****, donde* ***a****,* ***b*** *y* ***A*** *son constantes conocidas*

Utilizando el teorema de Pitágoras para lograr así una aproximación lineal de cualquier curva , tendremos:



$ds = [(dt)^2 + (dx)^2]^{1/2} = [1 + x'(t)^2]^{1/2}$

Con lo que el problema se plantea de la siguiente manera

$$\min_{x(t)} \int_a^a [1 + x'(t)]^{1/2} dt$$

Sujeto a   x(a) = A
x(b) = Libre

Debido a que la integral F depende sólo de ***x´***, la solución de la ecuación de Euler tiene la forma:

$$\mathbf{x}(t) = c_1t+c_2.$$

Utilizando a su vez la condición de transversalidad

$$F_{x}{}' = x'/[1+x'^2(b)]^{1/2} = 0$$

$$x'(b)=0$$

así las constantes c_1, c_2 se determinan de la siguiente manera

$$x(a) = A = c_1 a + c_2$$

$$x'(b) = 0 = c_1$$

Luego

$$X(t)=A, \qquad a \le t \le b$$

Como se puede observar el camino optimo es una línea recta horizontal, es importante notar que la condición de Legendre es satisfecha dado que $F_{x'x'}>0$, siendo esta solución un mínimo.

Ejemplo b

$$\int_{t_0}^{t_1} [tx'(t) + (x'(t))^2]dt$$

Sujeta a

$$X(t_0)=\mathbf{X_0}\ ,\ X(t_1)=\mathbf{X_1}$$

Donde $\mathbf{t_0}$, $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{X_0}$ y $\mathbf{X_1}$ son parámetros dados.

Escribimos $F(t, x, x') = tx'+x'^2$ y tomamos $F_x=0$ y $F_x{}' = t + 2x'$

Siendo la condición de Euler

$$dF_x / dt = d(t + 2x')/dt = 0$$

Debido a que el lado derecho es cero , no necesitamos realizar la diferenciación , ya que la derivada de una función igual a cero es una constante

$$t + 2x' = k$$

Para alguna constante ***k***, luego separando las variables e integrando llegamos al siguiente resultado

$$x(t) = c_2 + c_1 t / 2 - t^2 / 4$$

Las constantes de integración deben satisfacer lo siguiente

$$x(t_0) = x_0 = c_2 + c_1 t_0 / 2 - t_0^2 / 4$$
$$x(t_1) = x_1 = c_2 + c_1 t_1 / 2 - t_1^2 / 4$$

Aplicación Económica

Un individuo busca la tasa de consumo óptima para cada momento del tiempo de modo tal que maximice su flujo descontado de Utilidad sobre un periodo de tiempo conocido de longitud **T**. La Utilidad del consumo ***U***(***C***(t)) a cada momento del *t* es una función creciente y cóncava conocida (utilidad marginal del consumo decreciente en el tiempo): **U´>0** y **U´´ <0** la cual es descontada a una tasa *r* , siendo así el planteo del problema para éste individuo:

$$\max \int_0^T e^{-rt} U(C(t)) dt \qquad \text{(I)}$$

sujeto a la restricción de flujo de caja del individuo. El individuo deriva ingresos corrientes de salarios exógenamente determinados **v(t)** y de ganancias de interes ***iK*** sobre sus tenencias de Activos de Capital ***K(t)***. Por simplicidad, el individuo puede prestar y pedir prestado activos a la misma tasa de interés i. Así el ingreso por interés y salario se destinan a consumir o ahorrar:

$$iK(t) + v(t) = C(t) + K'(t) \qquad \text{(II)}$$

siendo las condiciones iniciales y terminales del stock de capital

$$K(0)=K_0 \quad \text{y} \quad K(T)=K_T \qquad \text{(III)}$$

Usando (II) para eliminar C desde (I) y denotando el integral de (II) por F y tomando en cuenta (III) y utilizando la regla de la cadena:

$$F_k = e^{-rt} U'(C) i \qquad \text{y} \qquad F_{k'} = -e^{-rt} U'(C)$$

Así la condición de Euler será

$$d(-e^{-rt} U'(C)) / dt = e^{-rt} U'(C) i \qquad \text{(IV)}$$

Integrando (IV) sobre un pequeño intervalo de tiempo y reordenando

$$e^{-rt}U'(C) = \int_t^{t+\Delta} e^{-rs}U'(C(s))ids + e^{-r(t+\Delta)}U'(C(t+\Delta)) \qquad \text{(V)}$$

Lo anterior establece que en un plan de consumo óptimo el individuo no puede incrementar su Utilidad trasladando un dólar para consumo de un momento *t* a otro *t´*. La utilidad marginal descontada desde el consumo en *t* (lado izquierdo de (V)) debe ser igual a la utilidad marginal descontada lograda posponiendo el consumo a *t* + Δ (lado derecho de (V). Dado que posponer un peso de consumo genera *i* pesos en un instante de tiempo, un peso marginal consumido en *s* contribuye a incrementar la utilidad en *U´(C(s))* y por ende una fracción *i* del peso consumido en s contribuye en *iU´(C(s))*. De esta manera el primer término de la derecha de (V) es el incremento en la utilidad lograda por la ganancia de ingresos por posponer el consumo. Por otro lado, el peso ahorrado será consumido incrementando la utilidad en U´(C(t + Δ)) el segundo término sobre la derecha de (V) es la utilidad marginal descontada. Sabiendo que la utilidad de consumir en el futuro es menor, dada la tasa de descuento positiva, que la utilidad de consumir en le presente, la condición de optimalidad sugiere que esa perdida de consumir en el futuro debe ser exactamente compensada por las ganancias de utilidad por los intereses logrados vía la abstención de consumo en el presente.

Luego operando en (IV) y reorganizando términos tenemos

$$-U''C'/U'=i-r \qquad \text{(VI)}$$

La tasa proporcional del cambio en la utilidad marginal debe ser igual a la diferencia entre la tasa de rentabilidad de la inversión y el factor que determina la impaciencia ínter temporal del individuo.
Si $-U''/U'>0$ por hipótesis, la solución optima es caracterizada por $dC/dt>0$ si y solo si $i>r$.
La trayectoria de consumo óptima se incrementa si la tasa de ganancia del capital *i* excede la impaciencia del individuo *r*.
Nótese como todas estas relaciones se verifican independientemente de la especificación de la función de utilidad y demás parámetros constituyendo un patrón general de comportamiento sin considerar las preferencias de un individuo en particular.

Si la función de *U* es especificada, por ejemplo

$$U(C) = \ln C,$$
$$v(t)=0 \text{ para } 0< t < T$$
, y sea $K_T=0$
. En este caso (VI) se transforma en:

$$C'/C=i-r$$

Integrando y substituyendo en (II):

$$K'-iK=-C= -C(0)\,e^{(i-r)t}$$

Multiplicando por e^{-it}, integrando, y usando las condiciones de contorno K(0)= K_0 y K(T)=0 para encontrar las constantes de integración, resulta:

$$K(t) = e^{it} K_0 (1 - \frac{1-e^{-rt}}{1-e^{-rT}})$$

Luego:

$$K(t) = \frac{rK_0 e^{(i-r)t}}{1-e^{-rT}}$$

A lo largo de estos ejemplos se logra ver la diferencia entre resolver un ejercicio de manera explicita y de manera cualitativa como es de gran utilización en Economía

7.- Implementación en Maple

Con el propósito de integrar los conceptos de la Teoría del Cálculo de Variaciones se procede a implementar tales rutinas en diversos softwares algebraicos tales como Maple y Mathematica. El primero se detalla en ésta sección y el segundo en la próxima

A continuación se expone una rutina de programación en Maple que automatiza el computo de la Ecuación de Euler en ambientes algebraicos.

Versión 1.0

```
Euler := proc(f,x,y) local a,b,c,E_Eq:

a:=diff(x(t),t):
b:=eval(diff(f,x),[x=x(t),y=a]):
c:=eval(diff(f,y),[x=x(t),y=a]):

E_Eq:= b-diff(c,t):
E_Eq;
end;
```

Con el código anterior se crea una nueva función llamada **Euler** la cual arroja la Ecuación Homónima. La explicación de su sintaxis se expone a continuación:

Sintaxis

Euler(F(x,y,t),x,y);

donde:
F(.) es el integrando
x: la función incógnita
y: la derivada de x con respecto a t= x'(t)

Para clarificar, se expone el siguiente problema como ejemplo a resolver:

$$\min_{x(t)} \int_0^T [1+x'(t)]^{1/2}\,dt$$
$$sa: \quad x(0)=a$$
$$x(T)=b$$

Nótese como éste planteo representa al problema de hallar la trayectoria mínima entre dos puntos **(0, a)** y **(T, b)**. Así, la ecuación de Euler es:

```
Euler((1+y^2)^(1/2),x,y);
```

$$\frac{\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{x}(t)\right)}{\left(1+\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)^2\right)^{(3/2)}}-\frac{\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{x}(t)}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)^2}}$$

Y la solución de la misma es:

```
dsolve({Euler((1+y^2)^(1/2),x,y)=0},{x(t)});
```

$$\{\mathrm{x}(t)=\_C1\},\ \{\mathrm{x}(t)=\_C1\,t+\_C2\}$$

Especificando las condiciones iniciales y terminales resulta:

```
dsolve({Euler((1+y^2)^(1/2),x,y)=0,x(0)=a,x(T)=b},{x(t)});
```

$$x(t) = -\frac{(a-b)\,t}{T} + a$$

Con lo cual queda demostrada que el trayecto mas corto entre dos puntos es una línea recta que pasa por ellos.

Versión 1.1

Una variante de la rutina anterior se presenta seguidamente, la cual ofrece ciertas variedades en la sintaxis con leves mejoras con respecto al código anterior.

```
EulerII := proc(f,x) local a,b,ff,E_Eq:

ff:=eval(f,[x=a,diff(x,t)=b]):
E_Eq:= eval(Euler(ff,a,b),[a(t)=x,b(t)=diff(x,t)]):
E_Eq;

end;
```

Sintaxis

Euler(F(x(t),x'(t),t),x(t));

donde:
F(.) es el integrando
x(t): la función incógnita
x'(t): la derivada de x con respecto a t

Se muestra el mismo ejemplo anterior a los efectos de comparar las salidas y sintaxis del comando **EulerII** con el anterior.

```
EulerII((1+diff(x(t),t)^2)^(1/2),x(t));
```

$$\frac{\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{x}(t)\right)}{\left(1+\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)^2\right)^{(3/2)}}-\frac{\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{x}(t)}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)^2}}$$

```
dsolve({EulerII((1+diff(x(t),t)^2)^(1/2),x(t))=0},{x(t)});
```

$$\{\mathrm{x}(t)=\_C1\},\{\mathrm{x}(t)=\_C1\,t+\_C2\}$$

```
dsolve({EulerII((1+diff(x(t),t)^2)^(1/2),x(t))=0,x(0)=a,x(T)=
b},{x(t)});
```

$$\mathrm{x}(t)=-\frac{(a-b)\,t}{T}+a$$

8.- Mathematica

De manera similar a la sección anterior se presentan aquí las rutinas de programación en Mathematica que resuelven problemas de Cálculo de Variaciones.

```
Unprotect[CalcVar, n];


CalcVar[F_, y_List, u_List, t_] :=
 Module[{n}, n = Length[y];
  DSolve[
   Table[ ∂y[[i]]F - ∂u[[i]],t F, {i, 1, n}] ==
    Table[0, {i, 1, n}], y, t]]

Unprotect[CalcVarT, n];
```

```
CalcVarT[F_, y_List, u_List, t_, p_List,
  q_List, m_List] :=
 Module[{n, s}, n = Length[y];
  s1 = ReplaceAll[y, t → p[[1]]];
  s2 = ReplaceAll[y, t → p[[2]]];
  DSolve[
   Join[Table[ ∂y[[i]]F - ∂u[[i]],t F == 0,
     {i, 1, n}], Table[s1[[i]] == q[[i]],
     {i, 1, n}], Table[s2[[i]] == m[[i]],
     {i, 1, n}]], y, t]]
```

Con el programa anterior se crean dos nuevas funciones llamadas **CalcVar** y **CalcVarT** . La primera devuelve la solución de la Ecuación de Euler sin especificar las condiciones iniciales (las constantes de integración de la solución pueden calcularse añadiendo las condiciones de transversalidad apropiadas al problema en cuestión) y la segunda devuelve la solución de la ecuación diferencial mediante la especificación de las condiciones iniciales. La mismas se utilizan como sigue:

Sintaxis

CalcVar[F(x[t],x'[t]), x[t], x'[t], t];

donde:
F(x[t],x'[t]) es el integrando
x[t]: la función incógnita
x'[t]: la derivada de x con respecto a t= x'(t)
t: tiempo

CalcVarT[F(x[t],x'[t]), x[t], x'[t], t, {0,T}, {x[0}, {x[T]}];

donde:
F(x[t],x'[t]) es el integrando
x[t]: la función incógnita
x'[t]: la derivada de x con respecto a t= x'(t)
t: tiempo
{0,T}: Intervalo de tiempo
{x[0}, {x[T]}: Condiciones Iniciales y terminales de la variable en 0 y T respectivamente

Ejemplos

A continuación se brindan dos ejemplos que ilustran éstos dos nuevos comandos:

```
CalcVar[(1+ (y'[x])^2)^(1/2), {y[x]},
 {y'[x]}, x]
```

```
{{y[x] → C[1] + x C[2]}}
```

Se aprecia así la solución general, donde las constantes de integración pueden determinarse estableciendo las condiciones de transversalidad apropiadas y resolviendo mediante el comando **Solve.**

Para el caso particular de condiciones iniciales terminales e iniciales fijas el comando a utilizar es el siguiente:

```
CalcVarT[(1+ (y'[x])^2)^(1/2), {y[x]},
 {y'[x]}, x, {0, T}, {Yo}, {YT}]
```

$$\left\{y[x] \to Yo - \frac{x\ (Yo - YT)}{T}\right\}$$

BIBLIOGRAFÍA

Bellman, Richard (1957): *"Dynamic Programing"* Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

Cerdá Tena, Emilio (2001): *Optimización Dinamica.* Prentice Hall. España.

Alpha Chiang. "Elements of Dynamic Optimization", McGraw-Hill, 1992

Intriligator, Michael D (1971)**.** "*Mathematical optimization and economic theory*". Prentice-Hall.

Morton I. Kamien and Nancy L. Schwartz, (1991),*Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management,* (2nd ed.) by North Holland: New York.

Stokey, Nancy and Lucas, Robert (1987): *"Recursive Methods in Economic Dynamic"* Harvard University Press.