Departamento de Estadística y Matemática

Documento de Trabajo Nº 4

Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de Córdoba

Interpretación Económica de los Multiplicadores de Lagrange

Jorge Mauricio Oviedo [1]

Resumen: El presente escrito tiene por objeto analizar en detalle el significado económico de los multiplicadores de Lagrange en los problemas de Optimización con restricciones de igualdad. Para ello se describe primero el problema en términos matemáticos y se examinan después ejemplos clásicos de aplicación en la Teoría Microeconómica. En todos los casos se combinan el rigor matemático con la intuición económica a los fines de hacer accesible el material al estudiante de grado.

Palabras clave: Optimización, Función Lagrangeana, Función de Valor, Condición de Primer Orden, Multiplicadores de Lagrange.

[1] joviedo@eco.unc.edu.ar

1.- Tratamiento Matemático del Problema

Considérese el Siguiente Problema

$$\max_{x,y} f = f(x,y)$$
$$st: \quad g(x,y) = a$$

con lo que la función Lagrangeana será:

$$\max_{x,y,\lambda} L = f(x,y) - \lambda[g(x,y) - a]$$

de las condiciones de primer Orden se obtiene:

$$\begin{cases} L_x = f_x(x,y,a) - \lambda g_x(x,y) = 0 \\ L_y = f_y(x,y,a) - \lambda g_y(x,y) = 0 \\ L_\lambda = a - g(x,y) = 0 \end{cases}$$

de la solución del sistema anterior se obtienen[2]:

$$x^* = x(a)$$
$$y^* = y(a)$$
$$\lambda^* = \lambda(a)$$

Sustituyendo las solucione óptimas en la Función Lagrangeana se arriba a la funcion de valor:

$$\max_{x,y,\lambda} L = L^*(a) = f[x(a), y(a)] - \lambda(a)\{g[x(a), y(a)] - a\}$$

[2] Adviértase que por el Teorema de la función implícita las soluciones optimas pueden considerarse función del parámetro *a* en virtud de la no nulidad del Jabiano, ya que éste es simplemente el determinante de la matriz hessiana y la misma no puede anularse si se exige la condición suficiente de Segundo Orden como necesaria.

Derivando L con respecto a a:

$$\frac{dL^*(a)}{da} = f_x[x(a), y(a), a]x'(a) + f_y[x(a), y(a), a]y'(a) - \lambda'(a)g[x(a), y(a), a] +$$
$$+\lambda(a)\{g_x[x(a), y(a), a]x'(a), g_y[x(a), y(a), a]y'(a) + g_a[x(a), y(a), a]\}$$

Teniendo reagrupando términos convenientemente se tiene:

$$\frac{dL^*(a)}{da} = \{f_x[x(a), y(a)] - \lambda(a)g_x[x(a), y(a)]\}x'(a) +$$
$$\{f_y[x(a), y(a)] - \lambda(a)g_y[x(a), y(a)]\}y'(a) -$$
$$-\lambda'(a)\{g[x(a), y(a)] - a\} + \lambda(a)$$

Teniendo en cuenta por medio de la Condición de Primer Orden que[3]:

$$\begin{cases} f_x[x(a), y(a)] - \lambda(a)g_x[x(a), y(a)] \equiv 0 \\ f_y[x(a), y(a)] - \lambda(a)g_y[x(a), y(a)] \equiv 0 \\ g[x(a), y(a)] - a \equiv 0 \end{cases}$$

se deduce que:

$$\frac{dL^*(a)}{da} = \lambda(a)$$

Por otro lado si se observa que en el óptimo la restricción $g(x,y)$ es igual a a, la función de Lagrange evaluada en el óptimo es igual a la función f maximizada. Por lo tanto:

[3] Obsérvese como las relaciones se expresan como identidades pues las expresiones que se enchufan en las condiciones de primer orden surgieron justamente de las mismas ecuaciones.

$$\lambda(a) = \frac{df^*[x(a),y(a)]}{da} = f_a^*[x(a),y(a)]$$

Con lo que el valor del multiplicador de Lagrange puede interpretarse como el la sensibilidad que experimenta la función objetivo evaluada en el optimo (llamada función de valor o función indirecta) ante un relajamiento de la restricción. Alternativamente, esto puede entenderse como la "**valoración**" que hace *f* en términos del cambio que experimenta su valor óptimo ante una sensibilización del parámetro de restricción. Esto último hace que comúnmente se le llame al valor de λ, "***precio sombra***".

2- Aplicaciones Económicas

Maximización de la Utilidad del Consumidor:

Un problema clásico dentro de la teoría del Consumidor es hallar las cestas óptimas de consumo que maximizan su utilidad dado los precios de los bienes y una renta monetaria fija. Es decir

$$\max_{x,y} U = U(x,y)$$
$$st: \quad P_x x + P_y y = M$$

De la solución del mismo se obtendrán las siguientes funciones de demandas del consumidor para cada uno de los bienes mas el valor optimo del multiplicador de lagrange:

$$x^* = x(M, p_x, p_y)$$
$$y^* = y(M, p_x, p_y)$$
$$\lambda^* = \lambda(M, p_x, p_y)$$

Es decir se obtendrían las cantidades optimas a consumir por el individuo para cada nivel de precios y renta monetaria. Éstas son conocidas en la literatura económica como las funciones de demanda.

En cuanto al Multiplicador de Lagrange de acuerdo a lo presentado se puede interpretar como:

$$\lambda(M, P_x.P_y) = \frac{dU^*[x(M, P_x.P_y), y(M, P_x.P_y)]}{dM} = U_M^*(M, P_x.P_y)$$

es decir el valor marginal de la Renta para el consumidor pues dicho valor indica en cuanto varía el bienestar del consumidor como consecuencia de un incremento marginal (infinitesimal) de su renta monetaria.

b.- Minimización de Costos

Otro problema común en la teoría económica consiste en seleccionar la combinación óptima de Insumos que permite producir un nivel determinado de Output dados los precios de los insumos:

$$\begin{aligned} &\min_{L,K} CT = wL + rK \\ &st: \quad f(L,K) = Q \end{aligned}$$

de la solución del Problema planteado se arriba a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} L^* &= L(Q,w,r) \\ y^* &= y(Q,w,r) \\ \lambda^* &= \lambda(Q,w,r) \end{aligned}$$

Que en son las denominadas “demandas condicionadas” de factores productivos (Capital y Trabajo), en el sentido que indican las cantidad optimas a contratar de insumos condicionadas a producir un determinado nivel de Output a cada niel de precios de los factores. Obsérvese además que la función de valor recibe en este problema un nombre especial:

$$\min_{L,K} CT = CT^*[L(Q,w,r), K(Q,w,r)] = CT^*(Q,w,r)$$

se trata nada mas que de la Función de Costos de la empresa en el sentido de que indica el costo mínimo de producir un determinado nivel de Output dado los precios de los factores.
En cuanto a la interpretación Económica del multiplicador de Lagrange este no es otra cosa mas que el Costo Marginal de la empresa es decir el incremento en los costos totales como consecuencia de un aumento infinitesimal del nivel de producción deseado.

$$\lambda(Q,w,r) = \frac{\partial CT^{*}[L(Q,w,r),K(Q,w,r)]}{\partial Q} = U_{Q}^{*}(Q,w,r)$$

c.- Elección Intertemporal del Consumo

Considérese el problema de elección Intertemporal del consumo de un individuo que recibe una renta en dos periodos Y1 y Y2 y debe distribuir óptimamente su consumo entre ambos periodos dada su función de preferencias intertemporales y una tasa de interés r que le permite pedir y tomar prestados fondos entre ambos periodos. Matemáticamente el problema se traduce en:

$$\begin{aligned} &\max_{C_1,C_2} U = U(C_1,C_2) \\ &st: \quad C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} \end{aligned}$$

Si llamamos al termino del valor actual de la renta w significando así el valor total de su riqueza el problema se puede plantear así:

$$\begin{aligned} &\max_{C_1,C_2} U = U(C_1,C_2) \\ &st: \quad C_1 + \frac{C_2}{1+r} = W \end{aligned}$$

con lo que se obtendrían los siguientes óptimos:

$$C_1^{\ *} = C_1(W,r)$$
$$C_2^{\ *} = C_2(W,r)$$
$$\lambda^* = \lambda(W,r)$$

Siendo estas las demandas intertemporales de consumo del individuo como función de su riqueza y de la tasa de interés. En cuanto al multiplicador de Lagrange ese se puede interpretar como sigue:

$$\lambda(W,r) = \frac{\partial U^*[C_1(W,r),C_2(W,r)]}{\partial W} = U_W^*(W,r)$$

es decir el valor del incremento marginal de la riqueza del individuo medido en términos de la satisfacción que a éste le reporta vía su función de preferencias intertemporales.

BIBLIOGRAFIA

Alpha C. Chiang: “*Métodos Fundamentales de Economía Matemática*”. Tercera Edición. McGraw-Hill. 1998.

Intriligator, Michael D (1971). “*Mathematical optimization and economic theory*”. Prentice-Hall.

Kreps 1995, “*Curso de Teoría Microeconómica*”. McGraw-Hill. Madrid. España

Simon and Blume “*Mathematics for Economist*” W. W. Norton, New York. 1994.

Varian, Hal R “*Análisis microeconómico”* 3. ed. A. Bosch.. Barcelona 1992

Varian, Hal R “*Microeconomía intermedia : un enfoque moderno*” 3. ed. A. Bosch Barcelona 1994.