Método SUR. Implementaciones en: Implementaciones en Maple, Mathematica, Gauss, Matlab y Excel

Jorge Mauricio Oviedo [1]

Resumen: El presente trabajo tiene por objetivo brindar una exposición clara y exhaustiva del Método SUR. Para llevar a cabo dicha tarea se presenta una revisión teórica de tal tópico complementada con ejemplos numéricos diseñados para una fácil y didáctica asimilación. Se brindan además rutinas de programación en Matemática, Maple, Matlab, Gauss y Excel que automatizan la tarea de resolución de dichos problemas y permiten visualizar la evolución de los algoritmos. De esta manera, se logra cumplir el fin de fomentar el uso de tal método cuantitativo minimizando el esfuerzo de aprendizaje y resolución.

Palabras clave: Función, Ecuación algebraica, Máximo Global, Máximo Local, Derivada, Matriz Jacobiana

---

[1] joviedo@eco.unc.edu.ar

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Ante determinadas situaciones el investigador puede verse en la necesidad de modelar y estimar conjuntamente varias ecuaciones que en apariencia no representen simultaneidad entre las mismas. Sin embargo, los errores aleatorios pueden presentar algún grado de correlación contemporánea en la medida que involucren a factores comunes no medibles y/o no observables y será esta correlación no percibida la que haga que resulte más eficiente estimar todas las ecuaciones simultáneamente y no una por una por Mínimos Cuadrados Ordinarios.
En la teoría económica existen innumerables ejemplos de estimaciones conjuntas. Se puede tratar de ajustar la demanda de determinado bien a lo largo del tiempo y en diferentes regiones. Se podrían, a su vez, encontrar las demandas de diferentes bienes que están relacionados (ya bien como sustitutos o complementarios), caso éste del ejercicio a realizar. La inversión en el tiempo de distintas firmas es otro caso típico.
La correlación del término de perturbación de distintas ecuaciones en un momento del tiempo es conocida como correlación contemporánea (distinta a la autocorrelación, que es la correlación en el tiempo en una misma ecuación).
La técnica apropiada de estimación conjunta es conocida como Seemingly Unrelated Regressions -Ecuations- (SUR), o regresiones aparentemente no relacionadas.
El método SUR es utilizado por lo general en la estimación de un conjunto de ecuaciones utilizando series de tiempo, pero es igualmente útil para datos de corte transversal. El método Sur puede ser considerado como un método para combinar datos de series de tiempo y corte transversal.
De una manera más formal la situación de modelización que propicia la aplicación de este nuevo método es:

$$y_i = X_i \beta_i + e_i \qquad \text{con i} = 1, 2, \ldots, \text{M, donde M} = \text{cantidad de ecuaciones}$$

donde claramente se observa las diferencias con los problemas tradicionales de estimación, ya que ahora se debe relacionar series de tiempo con cortes transversales, existiendo no sólo la posibilidad de autocorrelación entre los errores para cada observación de una ecuación "i", sino que además pueden ocurrir interrelaciones entre las perturbaciones de dos ecuaciones (vector e_i contra el vector e_j).

MÉTODO SUR

Dado $y_i = X_i \beta_i + e_i \qquad \text{con i} = 1, 2, \ldots, \text{M},$. Donde cada y_i es (T x 1), la matriz X_i es de (T x K_i), los β_i son de (K_i x 1) y las perturbaciones de (T x 1). Dados los tamaños, el modelo se puede reducir a:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & & & \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & X_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix} \rightarrow Y_{(TMx1)} = X_{(TMxK)} \beta_{(Kx1)} + e_{(TMx1)}$$

Donde K surge de la suma de los K_i de cada ecuación.
Cada ecuación, como se dijo anteriormente, posee ruido blanco en los disturbios, pudiéndose estimar por MCO separadamente. El problema surge cuando al hacer esto,

no consideramos las relaciones entre las ecuaciones (correlación contemporánea).

Para encontrar entonces la matriz de covarianzas de todo el sistema, a partir de la matriz (Σ) que contiene las varianzas de los disturbios de cada ecuación (σ_{ii}), se deben recordar la propiedad de homoscedasticidad, y las covarianzas entre las ecuaciones (σ_{ij} con $i \neq j$), que reflejan las correlaciones contemporáneas, con lo cual se tiene

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1M} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M1} & \sigma_{M2} & \cdots & \sigma_{MM} \end{bmatrix}$$

Haciendo el producto de kronecker ($\otimes$) entre la matriz anterior y una identidad de orden (T), se obtiene lo siguiente:

$$\Sigma \otimes I_T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{12} & 0 & \cdots & 0 & & \sigma_{1M} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{11} & \cdots & 0 & 0 & \sigma_{12} & \cdots & 0 & \cdots\ \cdots & 0 & \sigma_{1M} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{11} & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{12} & & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{1M} \\ \sigma_{12} & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{22} & 0 & \cdots & 0 & & \sigma_{2M} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{12} & \cdots & 0 & 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 & \cdots\ \cdots & 0 & \sigma_{2M} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{12} & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{22} & & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{2M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{1M} & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{2M} & 0 & \cdots & 0 & & \sigma_{MM} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{1M} & \cdots & 0 & 0 & \sigma_{2M} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{MM} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{1M} & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{2M} & & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{MM} \end{bmatrix}$$

A esta matriz la llamaremos Φ y representará la matriz de V y COV relevante. Si nosotros conocemos a Φ, podemos estimar los coeficientes por MCG, deduciendo del álgebra matricial que:

$$\hat{\beta} = [X'(\Sigma^{-1} \otimes I)X]^{-1} X'(\Sigma^{-1} \otimes I)y \Rightarrow \hat{\beta} = [X'\Phi^{-1}X]^{-1} X'\Phi^{-1}y$$

El nuevo estimador posee una menor varianza ya que tiene en cuenta la correlación contemporánea entre los distintos vectores de las perturbaciones de las diferentes ecuaciones

Sin embargo existen dos casos particulares en que se obtienen resultados idénticos al aplicar MCO sobre cada ecuación y al aplicar SUR y no se producen ganancias al tratar a las ecuaciones como sistema.

a) Cuando las correlaciones contemporáneas son iguales a “0”. Ello es obvio, ya que es la existencia de dicha correlación lo que provoca que las ecuaciones estén relacionadas.

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$$

b) Cuando las variables explicatorias de cada ecuación son las mismas.

$$X_1 = X_2 = X_3 = \overline{X}$$

Las variables explicativas de todas las ecuaciones son las mismas, por lo que no se produce una ganancia al tratarlas en forma conjunta, ya que no se agrega ninguna variable explicativa a cada variable dependiente.

Por lo tanto, la estimación a través de MCO nos proporciona la misma solución que el método SUR. Ello se puede demostrar partiendo del estimador SUR, utilizando algunas propiedades del producto de Kronecker y observando que, al ser todas las matrices X_i iguales, entonces $X = (I \otimes \overline{X})$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{SUR} &= (X'(\Sigma^{-1} \otimes I)X)^{-1} X©(\Sigma^{-1} \otimes I)\, y \\
&= ((I \otimes \overline{X}')(\Sigma^{-1} \otimes I)(I \otimes \overline{X}))^{-1} (I \otimes \overline{X}')(\Sigma^{-1} \otimes I)\, y \\
&= (\Sigma^{-1} \otimes (\overline{X}'\overline{X}))^{-1} (\Sigma^{-1} \otimes I)\, y \\
&= (\Sigma \otimes (\overline{X}'\overline{X})^{-1})(\Sigma^{-1} \otimes I)\, y \\
&= (I \otimes (\overline{X}'\overline{X})^{-1}\overline{X}')\, y \\
&= ((I \otimes \overline{X})'(I \otimes \overline{X}))^{-1} (I \otimes \overline{X})'\, y \\
&= (XX)^{-1} X©\, y = \hat{\beta}_{MCO}
\end{aligned}$$

Cuando no se conoce a la matriz de V y COV (Φ), se opta por construirla a través de los errores muestrales de la siguiente forma:

$$\hat{\beta}_{MCOi} = (X©_i X_i)^{-1} X©_i y_i \;\Rightarrow\; \hat{e}_i = y_i - X_i\, \hat{\beta}_{MCOi}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T}\hat{e}_i \hat{e}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{e}_{it}\, \hat{e}_{jt}$$

Aunque sea sesgada en muestras pequeñas. Para evitar el sesgo, se suele dividir el sumatorio por (T – K/M). La dificultad aparece cuando el modelo incluye ecuaciones con diferentes números de parámetros, ya que en dicho caso no se cuenta con iguales grados de libertad para las distintas ecuaciones, en especial al calcular las covarianzas entre dos ecuaciones de distintos grados de libertad. Una alternativa interesante es utilizar como divisor T-$\overline{k}$, donde $\overline{k}$ es la media del número de coeficientes de las ecuaciones.

Dicho divisor posee la ventaja de que si todas las ecuaciones poseen el mismo número de coeficientes, provee de estimadores insesgados. Si definimos a la matriz de los estimadores de las varianzas y covarianzas del modelo como $\hat{\Sigma}$, el estimador MCG del modelo cuando la matriz de varianzas y covarianzas es desconocida, es:

$$\hat{\hat{\beta}}_{SUR} = (X'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I)X)^{-1} X'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I)\, y$$

Este estimador es conocido como el estimador Sur de Zellner y es el que se utiliza por lo general en la práctica.

Habiendo expuesto esta breve introducción teórica se pasará a aplicar tales conocimientos mediante el siguiente ejercicio:

A partir de los siguientes datos y la siguiente especificación estimar: En un sistema de ecuaciones de demanda de tres bienes (q) cuyas variables predictoras son los precios de cada bien y el ingreso, expresados como logaritmos (los coeficientes representan elasticidades).

$$\ln q_{it} = \beta_{i0} + \beta_{i1} \ln p_{1t} + \beta_{i2} \ln p_{2t} + \beta_{i3} \ln p_{3t} + \beta_{i4} \ln y_t + e_{it}$$
$$i = 1,2,3$$

TABLA 1

P1	P2	p3	y	q1	q2	q3
10.763	4.474	6.629	48.7648	11.632	13.194	45.770
13.033	10.836	13.774	36.4877	12.029	2.181	13.393
9.244	5.856	4.063	54.1037	8.916	5.586	104.819
4.605	14.010	3.868	76.0343	33.908	5.231	137.269
13.045	14.417	14.922	42.1746	4.561	10.930	15.914
7.706	8.755	14.318	57.8214	17.594	11.854	23.667
7.405	7.317	4.794	56.1734	18.842	17.045	62.057
7.519	6.360	3.768	30.1470	11.637	2.682	52.262
8.764	4.188	8.089	37.9636	7.645	13.008	31.916
13.511	1.996	2.708	47.8855	7.881	19.623	123.026
4.943	7.268	12.901	43.3741	9.614	6.534	26.255
8.360	5.839	11.115	52.5702	9.067	9.397	35.540
5.721	5.160	11.220	51.3067	14.070	13.188	32.487
7.225	9.145	5.810	40.8666	15.474	3.340	45.838
6.617	5.034	5.516	19.2061	3.041	4.716	26.867
14.219	5.926	3.707	46.2621	14.096	17.141	43.325
6.769	8.187	10.125	31.2659	4.118	4.695	24.330
7.769	7.193	2.471	40.0848	10.489	7.639	107.017
9.804	13.315	8.976	39.2215	6.231	9.089	23.407
11.063	6.874	12.883	37.7724	6.458	10.346	18.254
6.535	15.533	4.115	34.3552	8.736	3.901	54.895
11.063	4.477	4.962	30.1599	5.158	4.350	45.360
4.016	9.231	6.294	24.4112	16.618	7.371	25.318
4.759	5.907	8.298	36.5032	11.342	6.507	32.852
5.483	7.077	9.638	25.6125	2.903	3.770	22.154
7.890	9.942	7.122	18.4798	3.138	1.360	20.575
8.460	7.043	4.157	35.9084	15.315	6.497	44.205
6.195	4.142	10.040	62.9378	22.240	10.963	44.443
6.743	3.369	15.459	30.6527	10.012	10.140	13.251
11.977	4.806	6.172	34.7488	3.982	8.637	41.845

Si se quisiera observar la verdadera relación funcional entre las cantidades demandadas y tales determinantes se debe proceder a tomar antilogaritmos a ambos miembros con lo que que se obtendría lo siguiente:

$$q_{it} = A * p_{1t}^{\beta i1} * p_{2t}^{\beta i2} * p_{3t}^{\beta i3} * y_t^{\beta i4} * \exp(e_{it})$$
$$i = 1,2,3$$

La especificación a tales tipos de demandas corresponde, como se aprecia, a funciones de utilidad del tipo Cobb-Douglas y surgen de la conducta optimizadota de los agentes económicos intervinientes (en este caso los consumidores) en donde estos maximizan su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria.

Como bien es sabido toda función de demanda debe cumplir con ciertas propiedades entonces, para probar si realmente los datos se ajustan a estas funciones, se deben colocar las siguientes restricciones que tienen que ver con tales propiedades de las demandas de esta clase.

<u>Restricciones</u>

1- Condición de Engel:

$$w_1\beta_{14} + w_2\beta_{24} + w_3\beta_{34} = 1$$

La condición de Engel establece que la suma de las elasticidades ingreso de cada bien, ponderadas por la participación en el gasto total (p x q / y), debe ser igual a uno. Si se desarrollamos esta suma:

$$\left(\frac{p_1 q_1}{y} * \frac{\partial q_1}{\partial y} * \frac{y}{q_1}\right) + \left(\frac{p_2 q_2}{y} * \frac{\partial q_2}{\partial y} * \frac{y}{q_2}\right) + \left(\frac{p_3 q_3}{y} * \frac{\partial q_3}{\partial y} * \frac{y}{q_3}\right) = 1$$
$$\left(p_1 * \frac{\partial q_1}{\partial y}\right) + \left(p_2 * \frac{\partial q_2}{\partial y}\right) + \left(p_3 * \frac{\partial q_3}{\partial y}\right) = 1$$

Debemos observar si **la suma del gasto que en cada bien se produce, luego de un incremento en el ingreso, es igual a uno.** Es decir, que el incremento del gasto en los n bienes que se consumen deben agotar la totalidad del incremento en el ingreso.

$$\left(p_1 * \frac{\partial q_1}{\partial y}\right)dy + \left(p_2 * \frac{\partial q_2}{\partial y}\right)dy + \left(p_3 * \frac{\partial q_3}{\partial y}\right)dy = dy$$

2- Homogeneidad:

$\beta_{i1} + \beta_{i2} + \beta_{i3} + \beta_{i4} = 0$ para $i = 1,2,3$

Recordando que los coeficientes representan las elasticidades precio (β_{i1}, β_{i2}, β_{i3}) e ingreso (β_{i4}); debemos comprobar la propiedad de "**homogeneidad de grado cero"** de las funciones de demanda de este tipo para cada ecuación. La importancia de esta característica radica en su definición: Al multiplicar todos los precios por un valor "δ" arbitrario, distinto de cero, la cantidad demandada no variará si también multiplicamos nuestro ingreso por el mismo valor. Económicamente la condición de homogeneidad indica que el consumidor no padece "ilusión monetaria" en el sentido de que a la hora de consumir solo se fija en precios reales y no nominales. Lo dicho anteriormente se puede traducir formalmente como sigue:

$$q_{it} = A * p_{1t}^{\beta i1} * p_{2t}^{\beta i2} * p_{3t}^{\beta i3} * y_t^{\beta i4}$$
$$q_{it}^{'} = A * (\delta \times p_{1t})^{\beta i1} * (\delta \times p_{2t})^{\beta i2} * (\delta \times p_{3t})^{\beta i3} * (\delta \times y_t)^{\beta i4}$$
$$q_{it}^{'} = A * \delta^{(\beta i1 + \beta i2 + \beta i3 + \beta i4)} * p_{1t}^{\beta i1} * p_{2t}^{\beta i2} * p_{3t}^{\beta i3} * y_t^{\beta i4}$$

Se demuestra que al cumplirse la propiedad, el exponente de “ δ ” se anula dejando como consecuencia una identidad entre q_{it} y $q_{it}^{'}$; es decir, las cantidades demandadas de ese bien “i” en el momento “t” no variaron.

3- Simetría:

La condición de simetría establece que la elasticidad cruzada de un bien i con respecto a otro j, expresada como proporción de la participación en el ingreso del bien j, más la elasticidad-renta del bien i, debe ser igual a la elasticidad cruzada del bien j con respecto al bien i, expresada como proporción de la participación en el ingreso del bien i, más la elasticidad-renta del bien j., o dicho formalmente:

$$\frac{\beta_{ij}}{w_j} + \beta_{i4} = \frac{\beta_{ij}}{w_i} + \beta_{j4} \quad \text{para} \quad i, j = 1,2,3 (i \neq j)$$

Donde: $w_i = p_i q_i / y$ siendo $i = (1,2,3)$ representa la participación en el presupuesto del bien i-ésimo. Se debe utilizar: $\overline{w}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} (p_{it} q_{it} / y_t)$

Se pide:

a) Expresar las siete restricciones en la forma $R\beta = r$
b) Estimar las tres ecuaciones usando Mínimos Cuadrados y SUR restringido.
c) Test de Correlación Contemporánea.
d) Test de la validez de las restricciones de demanda teóricas
   1) Todos de una vez.
   2) Cada grupo separado.

Modelo

$$
\begin{bmatrix} \ln q_{11} \\ \ln q_{12} \\ \vdots \\ \ln q_{1T} \\ \ln q_{21} \\ \ln q_{22} \\ \vdots \\ \ln q_{2T} \\ \ln q_{31} \\ \ln q_{32} \\ \vdots \\ \ln q_{3T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & \phi & \phi \\ \phi & X_2 & \phi \\ \phi & \phi & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \\ \beta_{14} \\ \beta_{20} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \\ \beta_{24} \\ \beta_{30} \\ \beta_{31} \\ \beta_{32} \\ \beta_{33} \\ \beta_{34} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{1T} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{2T} \\ e_{31} \\ e_{32} \\ \vdots \\ e_{3T} \end{bmatrix}
$$

Siendo:

$$
X_1 = X_2 = X_3 = \begin{bmatrix} 1 & \ln p_{11} & \ln p_{21} & \ln p_{31} & \ln y_1 \\ 1 & \ln p_{12} & \ln p_{22} & \ln p_{32} & \ln y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln p_{1T} & \ln p_{2T} & \ln p_{3T} & \ln y_T \end{bmatrix}
$$

LAS RESTRICCIONES

En virtud de las propiedades enunciadas anteriormente surgen un conjunto de siete restricciones. Para expresar a las mismas en términos matriciales se definirán previamente a una matriz R de dimensión 7 x 15 y a un vector r de dimensión 7 x 1 de modo tal que las mismas queden de la siguiente forma:

$$\mathbf{R}\beta = r$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & w_2^{-1} & 0 & 1 & 0 & -w_1^{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & w_3^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w_1^{-1} & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_3^{-1} & 1 & 0 & 0 & -w_2^{-1} & 0 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\beta_{10} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \\ \beta_{14} \\ \beta_{20} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \\ \beta_{24} \\ \beta_{30} \\ \beta_{31} \\ \beta_{32} \\ \beta_{33} \\ \beta_{34}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
$$

Como se observa para especificar la matriz de restricciones se necesitan conocer los valores de las proporciones w_i. Dado que:

$\overline{w_i} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} (p_{it} q_{it} / y_t)$, de los datos se pueden calcular las ponderaciones como sigue:

Medias de w1	Medias de w2	Medias de w3
0.2026406	**0.13428713**	**0.66304338**

ahora las restricciones quedaran como:

$$\mathbf{R}\beta = r$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0.2026 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1343 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6630 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 7.2267 & 0 & 1 & 0 & -4.9348 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1.5082 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.9385 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5082 & 1 & 0 & 0 & -7.4467 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\beta_{10} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \\ \beta_{14} \\ \beta_{20} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \\ \beta_{24} \\ \beta_{30} \\ \beta_{31} \\ \beta_{32} \\ \beta_{33} \\ \beta_{34}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
$$

De esta manera se obtuvieron las restricciones que deben cumplir los coeficientes de las ecuaciones de demanda a estimar.

ESTIMACIÓN DE COEFICIENTES

MCO-SUR No restringido

A continuación se mostraran los resultados de las estimaciones por MCO y por el Método SUR libre. dichos resultados corresponden a los obtenidos por las diversas programaciones efectuados en los distintos lenguajes de Softwares matemáticos y econométricos[2].

En las primeras páginas se contempló que existen dos posibilidades ciertas de que el resultado por MCG y por MCO sea idéntico. En este caso se da la segunda alternativa ya que las submatrices X_1, X_2, X_3 son iguales. Así, si: $X_1 = X_2 = X_3 = \overline{X}$, entonces $X = I_M \otimes \overline{X}$. En consecuencia, los resultados esperados deben ser idénticos. A continuación, se presentan los outputs:

Estimadores Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

Ecuación 1	Ecuación 2	Ecuación 3
-4.8569518	-4.3110340	1.0165905
-0.57294254	0.19087939	-0.25038917
0.072490654	-0.63233952	-0.14429142
-0.20331645	0.13513297	-0.96517096
1.4265101	1.1406168	0.87970756

Estimadores de Regresiones Aparentemente No Relacionadas (SUR)

```
-4.8569518
-0.57294254
0.072490654
-0.20331645
1.4265101
-4.3110340
0.19087939
-0.63233952
0.13513297
1.1406168
1.0165905
-0.25038917
-0.14429142
-0.96517096
0.87970756
```

2 Para no enturbiar la exposición de la resolución del ejercicio se procede a presentar las diversas programaciones efectuadas en Gauss Light 4.0, Excel 2002, Mathematica 4.0, Matlab 5.3 e Eview-s 3.0 en el Apéndice al final de este ejercicio. Esta decisión se funda en la extensa longitud de los mismos como así también en la versatilidad que permite cada lenguaje los cuales pueden desviar innecesariamente la atención del lector.

Se observa que las estimaciones no varían tomando a cada ecuación o a todo el modelo. La conclusión inmediata al estimar por MCG es que seguimos encontrando los mismos valores en contraste con MCO, como se había anticipado anteriormente. Alternativamente existe otra forma de obtener los estimadores SUR cuando no se conoce la matriz de varianza y covarianzas. Dicho procedimiento se denomina Método SUR iterativo cuyo funcionamiento se expone a continuación.

SUR Iterativo

La metodología que se expuso para obtener los estimadores SUR cuando la matriz de varianzas y covarianzas era desconocida consistía en calcular en una primera etapa los estimadores MCO de cada una de las demandas, y utilizarlos para obtener los vectores de errores:

$$\hat{\beta}_{MCOi} = (X'_i X_i)^{-1} X'_i y_i \Rightarrow \hat{e}_i = y_i - X_i \hat{\beta}_{MCOi}$$

Con dichos vectores obtenemos el estimador de las varianzas y covarianzas:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\hat{e}_i' \hat{e}_j}{T - \bar{k}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{e}_i \hat{e}_j}{T - \bar{k}}$$

Formando una matriz estimada de las varianzas y covarianzas () a partir de los estimadores anteriores, estamos en condiciones de obtener el estimador SUR, dado por:

$$\hat{\hat{\beta}}_{SUR} = (X'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I)X)^{-1} X'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I)\, y$$

Suele utilizarse también otro estimador SUR a través de un proceso iterativo con los estimadores de las varianzas y covarianzas y los estimadores de los coeficientes del supermodelo. Una vez obtenido los estimadores SUR de los coeficiente, se los utiliza para estimar nuevamente la matriz de varianzas y covarianzas. A partir de la nueva estimación de las varianzas y covarianzas, aplicamos nuevamente la definición anterior y obtenemos en una segunda etapa un nuevo estimador SUR.
Este estimador SUR de segunda etapa puede ser utilizado para estimar nuevamente la matriz de varianzas y covarianzas. A partir de dicha nueva matriz, podemos obtener un estimador SUR en una tercera etapa; y así de forma consecutiva hasta que se produzca una convergencia a un valor estable. Dicha convergencia llevara a que dos iteraciones sucesivas sean similares.
No se repite el output proporcionado por los programas ya que resulta exactamente el mismo reproducido en la sección anterior. No hay ganancia al utilizar el proceso iterativo ya que los estimadores MCO que permiten obtener el estimador de la matriz de varianzas y covarianzas son los mismos que luego se obtienen al estimar el supermodelo. Por lo tanto, los estimadores de los parámetros de las demandas que se utilizarían para obtener en una segunda etapa el nuevo estimador de la matriz de varianzas y covarianzas son los mismos que se utilizaron en el primer paso. Es decir, loas nuevas estimaciones por SUR en la segunda etapa serán los mismos que los de la primera etapa.

SUR RESTRINGIDO

Para estimar el modelo planteado teniendo en cuenta las siete restricciones enunciadas anteriormente, se debe estudiar con detenimiento cómo se construyen los estimadores del SUR Restringido.

La ecuación (1) desarrollaba el estimador por MCG cuando la matriz de Varianzas y Covarianzas (Φ), se definía: $\Phi = \Sigma \otimes I_T$. Cuando se tiene inserto las restricciones en términos del sistema de ecuaciones $R\beta = r$, se obtiene un tercer vector de coeficientes alternativos al de MCO y MCG libre. Cabe aclarar que este vector se forma con el supuesto de que la H_0) $R\beta = r$ es cierta.

La optimización ahora surge de minimizar la suma de los cuadrados de los errores sujeto a las siete limitaciones:

$$Min\ (Y - X\beta)' \left(\Sigma^{-1} \otimes I\right)(Y - X\beta)$$
$$\text{sujeto a: } R\beta = r$$

Resolviendo la CPO se obtiene:

$$\hat{\beta}* = \hat{\beta}_{mcg} + CR'\left(RCR'\right)^{-1}\left(r - R\hat{\beta}_{mcg}\right), \text{ donde } C = \left(X'\Phi^{-1}X\right)^{-1}$$

El problema que se nos plantea es el de no poder contar con la verdadera matriz de varianzas y covarianzas y por ello debemos utilizar MCGE (estimados) construido con la matriz

$$\hat{\Sigma} = \left[\hat{\sigma}_{ij}\right]_{K \times K} \quad \text{de donde cada elemento } \hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{(T - K/M)} \sum_{t=1}^{T} \hat{e}_{it}\, \hat{e}_{jt} \ .$$

De esta manera, se puede hallar también a $\hat{\Phi} = \hat{\Sigma} \otimes I_M$ con lo que el vector de coeficientes estimados para H_0 cierta queda como sigue:

$$\hat{\hat{\beta}}* = \hat{\hat{\beta}}_{mcg} + \hat{C}R'\left(R\hat{C}R'\right)^{-1}\left(r - R\hat{\hat{\beta}}_{mcg}\right).$$

A continuación se exponen las salidas de los programas cuyos detalles de programación se encuentran en el Apéndice

```
ESTIMADORES SUR RESTRINGIDO
 -2.707683168735712
-0.8553230741629710
-0.1132515064554003
-0.2797971645500550
  1.248371745168454
 -1.634428692893867
-0.09736919721132323
-0.8198223545907002
 0.03174943470693548
```

```
0.8854421170950835
-0.2110361345371308
-0.02450175716563730
-0.001873132759490775
-0.9209003416188106
0.9472752315439319
```

TEST DE CORRELACION CONTEMPORANEA

En la primera parte del trabajo, al describir las características del modelo SUR, enfatizamos la existencia de correlación no nula entre los errores de cada uno de los grupos o ecuaciones del sistema. La misma se define como contemporánea justamente porque relaciona perturbaciones en un mismo período de tiempo (t). Saber si existe correlación contemporánea o no es importante ya que si no existe, aplicar MCO a cada ecuación por separado es tan eficiente como SUR. Testear si existe correlación contemporánea es útil para determinar si es o no es necesario aplicar SUR.
Para el ejercicio de demandas,

$$\ln q_{it} = \beta_{i0} + \beta_{i1} \ln p_{1t} + \beta_{i2} \ln p_{2t} + \beta_{i3} \ln p_{3t} + \beta_{i4} \ln y_t + e_{it}$$
$$i = 1, 2, 3$$

se quiere establecer si influye en el consumo del bien "i" el comportamiento del bien "j". De esta manera, del sistema:

Se puede deducir que las correlaciones se deben buscar contrastando los e_{it} con los e_{jt} para un mismo "t". Sabiendo que: $\sigma_{ij} = \frac{1}{(T - K/M)} \sum_{t=1}^{T} e_{it}\, e_{jt}$; lo que se quiere probar es simplemente si los σ_{ij} son nulos o no.

H_0) $\sigma_{ij} = 0 \; \forall i \neq j$

H_A) Al menos una covarianza igual a cero.

Construimos el estadístico del Multiplicador de Lagrange. El mismo se arma en base a los coeficientes de correlación muestral (r):

$$\lambda = T \sum_{i=2}^{M} \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}^2$$

con M = número de ecuaciones. El estadístico, en el límite, se distribuye asintóticamente Chi cuadrado con M(M-1)/2 grados de libertad (la cantidad de covarianzas distintas existentes en la matriz Σ).

Para el ejemplo, recordando cuál es la matriz Σ, encontramos los r_{ij} a partir de saber que:

$$r_{ij}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{ij}^2}{\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{jj}}$$

```
r12 = -0.014447814
r31 = -0.046890212
r32 = -0.038869633
lambda = 23.763976
```

El valor de λ se contrasta con un crítico para tres (3) grados de libertad:

Chi Observado	GL	Significación	Crítico (Chi Teórico)
23. 75992	**3**	**2.803514e-005**	**7.8147247**

Hay evidencia fuerte para rechazar la Hipótesis Nula, lo que equivale a decir que la probabilidad de haber obtenido un valor de lambda como el observado proveniente de una población en donde no existe correlación temporal es menor que el nivel de significación de 5%. Dicho de otra forma el valor de lambda cae en la zona de rechazo ubicada en la cola izquierda de la distribución Chi-cuadrado.

TEST DE LA VALIDEZ DE LAS RESTRICCIONES

Para verificar la Hipótesis nula $R\beta = r$, debemos encontrar un estadístico capaz de seguir una distribución asintótica aproximada que sea conocida. Para esto, partiendo de la noción de que: $\hat{\beta} \sim N(\beta;C)$; por lo tanto, por propiedad de las matrices: $R\hat{\beta} \sim N(r;RCR')$ bajo la hipótesis nula **cierta.** Sabiendo las características del exponente de una Normal Multivariada, podemos descifrar que:

$$g = \left(R\hat{\beta} - r\right)' \left(RCR'\right)^{-1} \left(R\hat{\beta} - r\right) \sim \chi^2(J).$$

Donde "J" es el número de restricciones. El último paso antes de utilizarlo para el contraste de hipótesis tiene que ver con la imposibilidad de contar con la verdadera varianza y, por ello, se construirá un $\hat{g}$ que surge de cambiar C por $\hat{C}$ y $\hat{\beta}$ por $\hat{\hat{\beta}}$. De esta manera,

$$\hat{g} \xrightarrow{d} \chi^2(J)$$

.

H_0) $R\beta = r$

H_A) $R\beta \neq r$

$\alpha = 5\%$

$\hat{g}$	GL (j)	Significancia	Chi Crítico
13.884750	**7**	**0.053269563**	**14.06712726**

Según el test, la Hipótesis del cumplimiento de las restricciones en general no se rechaza por estar en la cola izquierda de la distribución con un error del 5%. En otras palabras, las condiciones de homogeneidad, reciprocidad y de Engel pueden que se cumplan en nuestras series de demanda, todas juntas. Esto es así ya que la probabilidad de obtener un valor del estadístico como el observado proveniente de una población en donde se cumplan exactamente todas las restricciones es mayor que el nivel de significación establecido del 5%.

Existe otro test construido sobre la base de un estadístico con distribución que tiende a una F. Se parte de la noción de las sumas de cuadrados libres y restringidos:

$$\hat{\lambda}_F = \frac{\hat{g}/J}{\left(y - X\hat{\hat{\beta}}\right)'\left(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I\right)\left(y - X\hat{\hat{\beta}}\right)/(MT-K)} \xrightarrow{d} F(J; MT-K)$$

Puede demostrarse que el denominador converge en probabilidad a uno, por lo que puede ser omitido:

$$\hat{\lambda}_F = \frac{\hat{g}}{J} \sim F_{(J, MT-K)}$$

O de forma equivalente:

$$\hat{\lambda}_F = \frac{(e'_r e_r - e'e)/J}{e'e/(T-K/M)}$$

Y el valor observado de este estadístico debe ser comparado con el valor crítico teórico de una distribución F con J,(MT-K) grados de libertad para un nivel de confianza α. Si el valor observado es mayor que el crítico, se rechaza la hipótesis nula planteada; en caso contrario, no se puede rechazar la hipótesis nula. ¿Cual es el significado en cada caso? Si la reducción en la suma de cuadrados de los residuos debido a la estimación

libre (sin restricciones) no es suficientemente grande, no habrá pruebas para rechazar la hipótesis nula de que las restricciones son válidas. Por el contrario, si esta reducción es suficientemente grande, la hipótesis nula de que las restricciones son válidas se rechazará ya que al no considerarlas la suma de cuadrados de los residuos disminuye considerablemente.
Ambos estadísticos son asintóticamente equivalentes y en muestras finitas el estadístico F llevará al rechazo de la hipótesis nula en un numero menor de casos que el estadístico X^2, por lo que responde a una aproximación más conservadora.
Por último, cabe considerar el efecto de utilizar el divisor T-(K/M) en el estimador de Σ. Los estadísticos F y X^2 serán menores que si utilizáramos el divisor T, y por lo tanto la hipótesis nula será rechazada en un número menor de veces.

Para el ejemplo, estos fueron los resultados:

F observado	Significancia	F critico
1.9835358	**0.068456745**	**2.13431406**

Nuevamente, no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula a un nivel de significación del 5%.

TEST PARA LA CONDICION DE ENGEL

Cuando se desea probar las restricciones por separado en cada grupo, sólo se debe sobreescribir la matriz R y el vector columna r, de tal manera que sólo contenga las ecuaciones que nos interesan. En este caso, para la condición de Engel, la matriz R_1 se construye de la siguiente manera:

$$R_1 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0.2042 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1385 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6667\end{bmatrix}$$

r = 1

$$R_1\beta = r$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0.2026 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1343 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6630\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{10}\\ \beta_{11}\\ \beta_{12}\\ \beta_{13}\\ \beta_{14}\\ \beta_{20}\\ \beta_{21}\\ \beta_{22}\\ \beta_{23}\\ \beta_{24}\\ \beta_{30}\\ \beta_{31}\\ \beta_{32}\\ \beta_{33}\\ \beta_{34}\end{bmatrix} = 1$$

Se construye el mismo estadístico $\hat{\lambda}_F$ a partir de la H_0) Se cumple la Condición de Engel y se obtiene el siguiente resultado:

F observado	Significancia	F critico
1.0657405	**0.30522709**	**3.9685**

De acuerdo a los valores obtenidos puede afirmarse que no existe evidencia como para rechazar la hipótesis nula en el sentido de que la probabilidad de haber obtenido un valor del estadístico como el observado proveniente de una población donde la condición de ángel es verdadera es mayor que el nivel de significación del 5%.

En consecuencia puede creerse que la condición de Engel se cumple para estas demandas, ya que el valor observado se encuentra en la zona de no rechazo de la Hipótesis nula.

TEST PARA LA CONDICIÓN DE HOMOGENEIDAD

Bajo la misma metodología, encontramos R_2 y r_2 para observar qué ocurre con estas tres restricciones aisladas de las otras cuatro:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2\beta = r_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \\ \beta_{14} \\ \beta_{20} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \\ \beta_{24} \\ \beta_{30} \\ \beta_{31} \\ \beta_{32} \\ \beta_{33} \\ \beta_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

F observado	Significancia	F critico
2.7262025	**0.050023594**	**2.7266**

Si bien la probabilidad de obtener un valor del estadístico como el observado proveniente de una población donde la condición de Engel se cumple es apenas mayor que el nivel de significación de 5% y en consecuencia no se puede rechazar la hipótesis nula Evidentemente, para valores mayores del nivle de significación la interpretación se invierte.. Judge destaca que para muestras relativamente pequeñas (como es nuestro caso), el estadístico F puede ser el más apropiado comparado con el "g". Sin embargo, cuando T tiende a infinito, el primero se hace equivalente al último, en cuanto a que siguen una distribución aproximadamente Chi cuadrado con (J) grados de libertad.

TEST PARA LA CONDICION DE RECIPROCIDAD

La matriz R_3 y el vector r_3 se conforman:

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7.2267 & 0 & 1 & 0 & -4.9348 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5082 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.9385 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5082 & 1 & 0 & 0 & -7.4467 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \; r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3\beta = r_3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7.2267 & 0 & 1 & 0 & -4.9348 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5082 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.9385 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5082 & 1 & 0 & 0 & -7.4467 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \\ \beta_{14} \\ \beta_{20} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \\ \beta_{24} \\ \beta_{30} \\ \beta_{31} \\ \beta_{32} \\ \beta_{33} \\ \beta_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

F observado	Significancia	F critico
3.2846984	**0.025335409**	**2.7266**

Se puede observar en este caso que hay evidencia para rechazar la hipótesis nula, es decir, las demandas estudiadas parecen no cumplir con la reciprocidad desarrollada anteriormente. Esto es así ya que la probabilidad de obtener un valor del estadístico como el observado proveniente de una población donde las condiciones de reciprocidad se cumplen es menor al nivel de significación.

Como conclusión de los tests parece que no está del todo claro si en general las demandas provienen de Utilidades Cobb – Douglas con las propiedades enunciadas.

Esto es así ya que si bien para todas las restricciones en forma conjunta las propiedades parecen cumplirse, cuando se analizan por separado la condición de reciprocidad parece no cumplirse con un nivel de significación del 5%. Además, para el caso de propiedad de homogeneidad las conclusiones son altamente sensibles al nivel de significación utilizado ya que el valor del estadístico está en una zona límite entre el rechazo y el no rechazo.

APÉNDICE

GAUSS LIGHT 4.0

```
format 20,16;
load dat[30,7] = datos.txt;
t=rows(dat);
c=ones(t,1);
lnd=ln(dat);
x1=c~lnd[.,1:4];
x2=c~lnd[.,1:4];
x3=c~lnd[.,1:4];
y1=lnd[.,5];
y2=lnd[.,6];
y3=lnd[.,7];
b1=y1/x1;
b2=y2/x2;
b3=y3/x3;
print "
ESTIMADORES MCO"
b1;b2;b3;

/* residuos por MCO y Cov-Matrix estimate*/
e1hat=y1-x1*b1;
e2hat=y2-x2*b2;
e3hat=y3-x3*b3;
k1=rows(b1);
k2=rows(b2);
k3=rows(b3);
df=t-(k1+k2+k3)/3;
shat=(e1hat~e2hat~e3hat)'(e1hat~e2hat~e3hat)/df;

/* calculo estimadores SUR libres  */
y=y1|y2|y3;
x=(x1~zeros(t,k2)~zeros(t,k3))|(zeros(t,k1)~x2~zeros(t,k3))|(zer
os(t,k1)~zeros(t,k2)~x3);
ishat=invpd(shat);
iphi=ishat.*.eye(t);
bg=(x'*iphi*y)/(x'*iphi*x);
 print "
ESTIMADORES SUR LIBRES"
bg;

print "
Matriz Varianzas y Covarianzas"
shat;


/* SUR libre Iterativo */
iter=1;
tol={};
varhat=shat;
```

```
invarhat=invpd(varhat);
C=invpd(x'*(invarhat.*.eye(t))*x);
bsr=C*x'*(invarhat.*.eye(t))*y;
do until abs(tol)<0.00000001 or iter>25;
    eehat1=y1-x1*bsr[1:k1,1];
    eehat2=y2-x2*bsr[k1+1:k1+k2,1];
    eehat3=y3-x3*bsr[k1+k2+1:rows(bsr),1];
    EEhat=(eehat1~eehat2~eehat3);
    VVarHat=(EEhat'EEhat)/df;
    IInVarHat=Invpd(VVarHat);
    CC=invpd(x'*(IInVarhat.*.eye(t))*x);
    bsur=CC*x'*(IInVarhat.*.eye(t))*y;
    tol=bsur-bsr;
    bsr=bsur;
endo;
print "
SUR Libre Iterativo "
bsur;
?; ?; "
Matriz de Varianzas y covarianzas";
VVarhat;


/* Calculo de Matrices R B r  */
"
Proporciones en el presupuesto del gasto en el bien i";
w1=sumc(dat[.,1].*dat[.,5]./dat[.,4])/30; W1;
w2=sumc(dat[.,2].*dat[.,6]./dat[.,4])/30; W2;
w3=sumc(dat[.,3].*dat[.,7]./dat[.,4])/30; W3;
?; ?; "
Restricciones lineales en los coeficientes"; ?;

R1=zeros(1,15); R1[5]=w1; R1[10]=w2; R1[15]=w3;
rr1=1;
R2=zeros(3,15); R2[1,2 3 4 5]=ones(1,4); R2[2,7 8 9
10]=ones(1,4); R2[3,12 13 14 15]=ones(1,4);
rr2=zeros(3,1);
R3=zeros(3,15); R3[1,5]=1; R3[2,5]=1; R3[3,10]=1; R3[1,10]=-1;
R3[2,15]=-1; R3[3,15]=-1;
R3[1,3]=1/w2; R3[1,7]=(-1/w1); R3[2,4]=1/w3; R3[2,12]=(-1/w1);
R3[3,9]=1/w3; R3[3,13]=(-1/w2);
rr3=zeros(3,1);
R=R1|R2|R3;
rr=rr1|rr2|rr3;


/*calculo estimadors SUR restringidos*/
c=inv(x'iphi*x);
bgr=bg+c*R'*inv(R*c*R')*(rr-R*bg);
print "
ESTIMADORES SUR RESTRINGIDO"
bgr;


/*calculo estimadors SUR restringidos iterativos */
tol=1;
```

```
iter=1;
do until ((tol lt .000001) or (iter ge 20));
bgr=bg+c*R'*inv(R*c*R')*(rr-R*bg);
e1hat=y1-x1*bgr[1:5,.];
e2hat=y2-x2*bgr[6:10,.];
e3hat=y3-x3*bgr[11:15,.];
k1=rows(b1);
k2=rows(b2);
k3=rows(b3);
df=t-(k1+k2+k3)/3;
shat=(e1hat~e2hat~e3hat)'(e1hat~e2hat~e3hat);
iphi=invpd(shat).*.eye(t);
c=inv(x'iphi*x);
bgrt=bg+c*R'*inv(R*c*R')*(rr-R*bg);
tol=sumc(abs(bgrt-bgr));
iter=iter+1;
bgr=bgrt;
endo;
print "
ESTIMADORES SUR RESTRINGIDO ITERATIVOS"
bgrt;
print "
tolerancia e ieteraciones
"
tol;
iter;


/* calculo de test de hipotesis*/
/* test de correlacion contemporanea  */
print "
TEST DE CORRELACION CONTEMPORANEA" ;
fn corr(i,j)=shat[i,j]^2/(shat[i,i]*shat[j,j]);
lambda=t*(corr(2,1)+corr(3,1)+corr(3,2));
print "                    lambda = "
lambda;
print " Prob Ho cierta (correl) =      "
cdfchic(lambda,3);

/* test de validez de restricciones conjuntas */
print "
TEST DE VALIDEZ CONJUNTA DE RESTRICCIONES" ;
g=(r*bg-rr)'*inv(r*c*r')*(r*bg-rr);
print "                        g =  "
g;
print " Prob Ho cierta (restri) =    "
cdfchic(g,rows(r));
lambdaF=(g/rows(r))/((y-x*bg)'iphi*(y-x*bg)/(t*3-cols(x)));
print "                   lambdaF =  "
lambdaF;
print " Prob Ho cierta (restri) =      "
cdffc(lambdaF,3,t*3-cols(x));

/*test de valides de restricciones individual*/
r1=r[1,.];rr1=rr[1];
r2=r[2:4,.];rr2=rr[2:4];
```

```
r3=r[5:7,.];rr3=rr[5:7];
print "
ENGEL" ;
g1=(r1*bg-rr1)'*inv(r1*c*r1')*(r1*bg-rr1);
print "                        g1 =    "
g1;
print " Prob Ho cierta (Engel)  =    "
cdfchic(g1,rows(r1));
lambdaF1=(g1/rows(r1))/((y-x*bg)'iphi*(y-x*bg)/(t*3-cols(x)));
print "                   lambdaF1 = "
lambdaF1;
print " Prob Ho cierta (Engel)  =      "
cdffc(lambdaF1,rows(r1),t*3-cols(x));
print "
HOMOGENEIDAD";
g2=(r2*bg-rr2)'*inv(r2*c*r2')*(r2*bg-rr2);
print "                        g2 =    "
g2;
print " Prob Ho cierta (Homog)  =    "
cdfchic(g2,rows(r2));
lambdaF2=(g2/rows(r2))/((y-x*bg)'iphi*(y-x*bg)/(t*3-cols(x)));
print "                   lambdaF2 =  "
lambdaF2;
print " Prob Ho cierta (Homog)  =     "
cdffc(lambdaF2,rows(r2),t*3-cols(x));
print "
RECIPROCIDAD";
g3=(r3*bg-rr3)'*inv(r3*c*r3')*(r3*bg-rr3);
print "                        g3 =    "
g3;
print " Prob Ho cierta (Recip)  =    "
cdfchic(g3,rows(r3));
lambdaF3=(g3/rows(r3))/((y-x*bg)'iphi*(y-x*bg)/(t*3-cols(x)));
print "                   lambdaF3 =  "
lambdaF3;
print " Prob Ho cierta (Recip)  =     "
cdffc(lambdaF3,rows(r3),t*3-cols(x));
```

```
ESTIMADORES MCO
-4.856951761063339
-0.5729425449153166
0.07249065364046230
-0.2033164538636693
1.426510092799097

-4.311033969665255
0.1908793928209044
-0.6323395219442846
0.1351329671471977
1.140616808605022

1.016590524338987
-0.2503891709900725
```

```
-0.1442914183156109
-0.9651709622141513
0.8797075640702307

ESTIMADORES SUR LIBRES
-4.856951761071343
-0.5729425449143639
0.07249065364079721
-0.2033164538631200
1.426510092799819
-4.311033969683311
0.1908793928222422
-0.6323395219436627
0.1351329671474222
1.140616808607306
1.016590524346276
-0.2503891709907845
-0.1442914183158945
-0.9651709622144080
0.8797075640694331

Matriz Varianzas y Covarianzas
0.1538829550216696 -0.01444781420936465 -0.04689021249811016
-0.01444781420936465   0.2094496074514007 -0.03886963326370390
-0.04689021249811016 -0.03886963326370390  0.02737227329413123

Proporciones en el presupuesto del gasto en el bien i
0.2026735623366407
0.1342871286295072
0.6630433805286724



Restricciones lineales en los coeficientes


ESTIMADORES SUR RESTRINGIDO
-2.707683168735712
-0.8553230741629710
-0.1132515064554003
-0.2797971645500550
1.248371745168454
-1.634428692893867
-0.09736919721132323
-0.8198223545907002
0.03174943470693548
0.8854421170950835
-0.2110361345371308
-0.02450175716563730
-0.001873132759490775
-0.9209003416188106
0.9472752315439319

TEST DE CORRELACION CONTEMPORANEA
lambda =    23.75992970189397
Prob Ho cierta (correl) =     2.803514691916443e-005
```

```
TEST DE VALIDEZ CONJUNTA DE RESTRICCIONES
13.88475025008711
g =     13.88475025008711
Prob Ho cierta (restri) =    0.05326956279807276
lambdaF =     1.983535750012442
Prob Ho cierta (restri) =      0.06845674530924839

ENGEL
g1 =      1.065740450740348
Prob Ho cierta (Engel)  =     0.3019095630466173
lambdaF1 =    1.065740450740346
Prob Ho cierta (Engel)  =       0.3052270948303277

HOMOGENEIDAD
g2 =      8.178607602051875
Prob Ho cierta (Homog)  =    0.04246110364290927
lambdaF2 =     2.726202534017287
Prob Ho cierta (Homog)  =     0.05002359363998798

RECIPROCIDAD
                      g3 =      9.854095173111833
Prob Ho cierta (Recip)  =    0.01984797807803451
                lambdaF3 =     3.284698391037273
Prob Ho cierta (Recip)  =     0.02533540925190458

SUR Libre Iterativo
-4.856951761087891
-0.5729425449153118
0.07249065364033983
-0.2033164538633804
1.426510092801485
-4.311033969664172
0.1908793928200933
-0.6323395219447481
0.1351329671470126
1.140616808604555
1.016590524341868
-0.2503891709899169
-0.1442914183154467
-0.9651709622141846
0.8797075640690989



Matriz de Varianzas y covarianzas

0.1538829550216697 -0.01444781420936479 -0.04689021249811019
-0.01444781420936479   0.2094496074514007 -0.03886963326370384
-0.04689021249811019 -0.03886963326370384  0.02737227329413126
```

MATLAB 5.3

```
clear
clc
format long
dat = [10.763 4.474 6.629 487.648 11.632 13.194 45.770;
   13.033 10.836 13.774 364.877 12.029 2.181 13.393;
   9.244 5.856 4.063 541.037 8.916 5.586 104.819;
   4.605 14.010 3.868 760.343 33.908 5.231 137.269;
   13.045 11.417 14.922 421.746 4.561 10.930 15.914;
   7.706 8.755 14.318 578.214 17.594 11.854 23.667;
   7.405 7.317 4.794 561.734 18.842 17.045 62.057;
   7.519 6.360 3.768 301.470 11.637 2.682 52.262;
   8.764 4.188 8.089 379.636 7.645 13.008 31.916;
   13.511 1.996 2.708 478.855 7.881 19.623 123.026;
   4.943 7.268 12.901 433.741 9.614 6.534 26.255;
   8.360 5.839 11.115 525.702 9.067 9.397 35.540;
   5.721 5.160 11.220 513.067 14.070 13.188 32.487;
   7.225 9.145 5.810 408.666 15.474 3.340 45.838;
   6.617 5.034 5.516 192.061 3.041 4.716 26.867;
   14.219 5.926 3.707 462.621 14.096 17.141 43.325;
   6.769 8.187 10.125 312.659 4.118 4.695 24.330;
   7.769 7.193 2.471 400.848 10.489 7.639 107.017;
   9.804 13.315 8.976 392.215 6.231 9.089 23.407;
   11.063 6.874 12.883 377.724 6.458 10.346 18.254;
   6.535 15.533 4.115 343.552 8.736 3.901 54.895;
   11.063 4.477 4.962 301.599 5.158 4.350 45.360;
   4.016 9.231 6.294 294.112 16.618 7.371 25.318;
   4.759 5.907 8.298 365.032 11.342 6.507 32.852;
   5.483 7.077 9.638 256.125 2.903 3.770 22.154;
   7.890 9.942 7.122 184.798 3.138 1.360 20.575;
   8.460 7.043 4.157 359.084 15.315 6.497 44.205;
   6.195 4.142 10.040 629.378 22.240 10.963 44.443;
   6.743 3.369 15.459 306.527 10.012 10.140 13.251;
   11.977 4.806 6.172 347.488 3.982 8.637 41.845];
q0=size(dat);
t=q0(1,1);
c=ones(t,1);
lnd=log(dat);
x1=[c lnd(:,1:4)];
x2=[c lnd(:,1:4)];
x3=[c lnd(:,1:4)];
y1=lnd(:,5);
y2=lnd(:,6);
y3=lnd(:,7);
b1=inv(x1'*x1)*x1'*y1;
b2=inv(x2'*x2)*x2'*y2;
b3=inv(x3'*x3)*x3'*y3;
disp('
======================================================================'
)
disp('                              Estimadores por MCO
')
disp('
======================================================================'
)
B=[b1 b2 b3]
e1hat=y1-x1*b1;
e2hat=y2-x2*b2;
e3hat=y3-x3*b3;
q1=size(b1);
k1=q1(1,1);
q2=size(b2);
```

```
k2=q2(1,1);
q3=size(b3);
k3=q3(1,1);
df=t-(k1+k2+k3)/3;
disp('
======================================================================'
)
disp('                  Matriz de Varianzas y Covarianzas
')
disp('
======================================================================'
)

shat=[e1hat e2hat e3hat]'*[e1hat e2hat e3hat]
y=[y1;y2;y3];
x=[x1 zeros(t,k2) zeros(t,k3);zeros(t,k1) x2 zeros(t,k3);zeros(t,k1)
zeros(t,k2) x3];
ishat=inv(shat);
iphi=Kron(ishat,eye(t));
bg=inv(x'*iphi*x)*(x'*iphi*y);
disp('
======================================================================'
)
disp('                             Estimadores SUR
')
disp('
======================================================================'
)
bg
disp('            Proporciones en el presupuesto del gasto en el bien
i          ');
w1=sum(dat(:,1).*dat(:,5)./dat(:,4))/30;w1
w2=sum(dat(:,2).*dat(:,6)./dat(:,4))/30; w2;
w3=sum(dat(:,3).*dat(:,7)./dat(:,4))/30; w3;

R=[0 0 0 0 w1 0 0 0 0 w2 0 0 0 0 w3;
0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1;
0 0 1/w2 0 1 0 -1/w1 0 0 -1 0 0 0 0 0;
0 0 0 1/w3 1 0 0 0 0 0 0 -1/w1 0 0 -1;
0 0 0 0 0 0 0 0 1/w3 1 0 0 -1/w2 0 -1];
rr=[1 0 0 0 0 0 0]';
c=inv(x'*iphi*x);
disp('============================================================')
disp('         Estimadores SUR Restringidos                    ')
disp('============================================================')
bgr=bg+c*R'*inv(R*c*R')*(rr-R*bg);
bgr
% calculo de test de hipotesis*/
% test de correlacion contemporanea  */
a = zeros(3,3);
for i = 1:3;
   for j = 1:3;
      while j < i;
         a(i,j) = t*(shat(i,j).^2)/(shat(i,i).*shat(j,j));
         j=j+1
      end
     end;
 end;
disp('============================================================')
```

```
disp('       Test de correlacion contemporanea                    ')
disp('============================================================')
lambda=sum(sum(a))
prob=1-chi2cdf(lambda,3)
% test de validez de restricciones conjuntas */
disp('============================================================')
disp('        Test de validez ce restricciones conjuntas          ')
disp('============================================================')
g=(R*bg-rr)'*inv(R*c*R')*(R*bg-rr);
g
rowsr=7;
colsx=k1+k2+k3;
prob=1-chi2cdf(g,rowsr)
lambdaF=(g/rowsr)/((y-x*bg)'*iphi*(y-x*bg)/(t*3-colsx));
lambdaF
prob=1-fcdf(lambdaF,7,t*3-colsx)

%*test de valides de restricciones individual*/
%*Engel*/
disp(' ========================================================')
disp('                  Condicion de Engel                      ')
disp(' ========================================================')
r1=R(1,:);rr1=rr(1,:);rowsr1=1;
r2=R(2:4,:);rr2=rr(2:4,:);rowsr2=2;
r3=R(5:7,:);rr3=rr(5:7,:);rowsr3=3;
g1=(r1*bg-rr1)'*inv(r1*c*r1')*(r1*bg-rr1)
prob=1-chi2cdf(g1,rowsr1)
lambdaF1=(g1/rowsr1)/((y-x*bg)'*iphi*(y-x*bg)/(t*3-colsx))
prob=1-fcdf(lambdaF1,rowsr1,t*3-colsx)
%HOMOGENEIDAD;
disp(' ========================================================')
disp('                Condicion de Homogeneidad                  ')
disp(' ========================================================')
g2=(r2*bg-rr2)'*inv(r2*c*r2')*(r2*bg-rr2);
g2
prob=1-chi2cdf(g2,rowsr2)
lambdaF2=(g2/rowsr2)/((y-x*bg)'*iphi*(y-x*bg)/(t*3-colsx));
lambdaF2
prob=1-fcdf(lambdaF2,rowsr,t*3-colsx)
%RECIPROCIDAD";
disp(' ========================================================')
disp('            Condicion de Reciprocidad                      ')
disp(' ========================================================')
g3=(r3*bg-rr3)'*inv(r3*c*r3')*(r3*bg-rr3);
g3
prob=1-chi2cdf(g3,rowsr3)
lambdaF3=(g3/rowsr3)/((y-x*bg)'*iphi*(y-x*bg)/(t*3-colsx))
prob=1-fcdf(lambdaF3,rowsr3,t*3-colsx)


%SUR libre Iterativo %
disp(' ======================================================')
disp('             Estimadores SUR iterativos                ')
disp(' ======================================================')
iter=1;
tol=[];
varhat=shat;
invarhat=inv(varhat);
C=inv(x'*Kron(invarhat,eye(t))*x);
bsr=C*x'*Kron(invarhat,eye(t))*y;
while abs(tol)>0.000001 or iter<25
```

```
    eehat1=y1-x1*bsr(1:k1,1);
    eehat2=y2-x2*bsr(k1+1:k1+k2,1);
    eehat3=y3-x3*bsr(k1+k2+1:rows(bsr),1);
    EEhat=[eehat1 eehat2 eehat3];
    VVarhat=(EEhat'*EEhat)/df;
    IInVarhat=inv(VVarhat);
    CC=inv(x'*Kron(IInVarhat,eye(t))*x);
    bsur=CC*x'*Kron(IInVarhat,eye(t))*y;
    tol=bsur-bsr;
    bsr=bsur;
    iter=iter+1
end
bsur
disp(' ======================================================')
disp('           Matriz de Varianza y Covarianzas            ')
disp(' ======================================================')
VVarhat
```

Se optó por omitir el output de estas programaciones ya que sería demasiado redundante exponer resultados casi idénticos a los de Gauss Light 4.0

MATHEMATICA 4.0

Bajo este programa se trabajaron con 70 dígitos de precisión a los efectos de mostrar la precisión con la que trabaja este programa simbólico. Para ello fue necesario cargar los datos manualmente ya que se necesita expresarlos en términos fraccionarios a los fines de conservar exactitud.

```
dat =
 1/1000*
  {{10763, 4474, 6629, 487648, 11632,
    13194, 45770},
   {13033, 10836, 13774, 364877, 12029,
    2181, 13393},
   {9244, 5856, 4063, 541037, 8916, 5586,
    104819}, {4605, 14010, 3868, 760343,
    33908, 5231, 137269},
   {13045, 11417, 14922, 421746, 4561,
    10930, 15914},
   {7706, 8755, 14318, 578214, 17594,
    11854, 23667},
   {7405, 7317, 4794, 561734, 18842, 17045,
    62057}, {7519, 6360, 3768, 301470,
    11637, 2682, 52262},
   {8764, 4188, 8089, 379636, 7645, 13008,
    31916}, {13511, 1996, 2708, 478855,
    7881, 19623, 123026},
   {4943, 7268, 12901, 433741, 9614, 6534,
    26255}, {8360, 5839, 11115, 525702,
    9067, 9397, 35540},
   {5721, 5160, 11220, 513067, 14070,
    13188, 32487},
   {7225, 9145, 5810, 408666, 15474, 3340,
    45838}, {6617, 5034, 5516, 192061,
    3041, 4716, 26867},
   {14219, 5926, 3707, 462621, 14096,
    17141, 43325},
   {6769, 8187, 10125, 312659, 4118, 4695,
    24330}, {7769, 7193, 2471, 400848,
    10489, 7639, 107017},
   {9804, 13315, 8976, 392215, 6231, 9089,
    23407}, {11063, 6874, 12883, 377724,
    6458, 10346, 18254},
   {6535, 15533, 4115, 343552, 8736, 3901,
    54895}, {11063, 4477, 4962, 301599,
    5158, 4350, 45360},
   {4016, 9231, 6294, 294112, 16618, 7371,
    25318}, {4759, 5907, 8298, 365032,
    11342, 6507, 32852},
   {5483, 7077, 9638, 256125, 2903, 3770,
    22154}, {7890, 9942, 7122, 184798,
    3138, 1360, 20575},
   {8460, 7043, 4157, 359084, 15315, 6497,
    44205}, {6195, 4142, 10040, 629378,
    22240, 10963, 44443},
   {6743, 3369, 15459, 306527, 10012,
    10140, 13251},
   {11977, 4806, 6172, 347488, 3982, 8637,
    41845}};
```

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
lnd = Log[dat];
ones = Transpose[{Table[1, {i, 1, 30}]}];
h = TakeColumns[lnd, {1, 4}];
x = AppendRows[ones, h];
y1 = TakeColumns[lnd, {5, 5}];
y2 = TakeColumns[lnd, {6, 6}];
y3 = TakeColumns[lnd, {7, 7}];

b1 = N[Inverse[Transpose[x].x].Transpose[x].
   y1, 70];
MatrixForm[b1]
 -4.8569517610647035066473751193801802642979l6
-0.5729425449153154446407731978141824053373340
 0.0724906536404938591993993902437172921967643
-0.2033164538636632593926330696801920339454405
 1.426510092799312806932052623362962711225292
b2 = N[Inverse[Transpose[x].x].Transpose[x].
   y2, 70];
MatrixForm[b2]
 -4.311033969665675612632838606975599792386388
 0.1908793928208662918156995344354469358749425
-0.632339521944286157753206044306678080079959
 0.1351329671471862085406586383661118838386758
 1.140616808605110315411844746241977064782460
b3 = N[Inverse[Transpose[x].x].Transpose[x].
   y3, 70];
MatrixForm[b3]
 1.016590524338688283089289912454280018965861
-0.250389170990073713698801590999539283403668
-0.144291418315609877599970999254265813161821
-0.965170962214151630420634057803727072735959
 0.8797075640702809223741513131447349144375366
e = AppendRows[AppendRows[y1 - x.b1, y2 - x.b2],
  y3 - x.b3];
shat = N[Transpose[e].e, 70]
```

```
{{3.847073875541740970012650806061660611820\
   0730317378207582159973524256,
  -0.361195355234119257878452658891198774 92\
   7078525613577049665693911850 2,
  -1.172255312452753777254481855462094787 00\
   1392320816530076764456181121 8},
 {-0.361195355234119257878452658891198774 92\
   7078525613577049665693911850 2,
  5.236240186285015130637822760955872646099\
   185975077124619702216147092 0,
  -0.971740831592597207003997491815437262 56\
   8043307733374020672743693644 3},
 {-1.172255312452753777254481855462094787 00\
   1392320816530076764456181121 8,
  -0.971740831592597207003997491815437262 56\
   8043307733374020672743693644 3,
  0.684306832353281314486136288931438776830\
   8045951217777102345843288907 4}}
```

Se presentan a continuación las representaciones graficas correspondientes a las zonas de rechazo y no rechazo de los distintos test de hipótesis par a las restricciones de la demanda

Restricciones

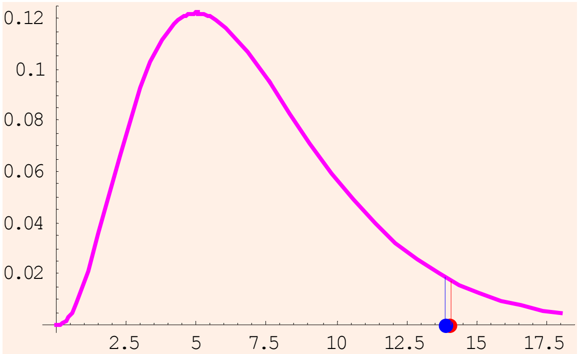
A-Todas las Restricciones en Conjunto

Estadístico Chi-cuadrado

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
n = 7;
Vobs = 13.884750;
gdist = ChiSquareDi[illegible]on
cdf[illegible]
A[illegible]x
f[illegible]on, x
TT =
 Plot[illegible]Thickness[illegible]DisplayFunction ® Identity
Vcrit = Solve[illegible]
Vcrit = x [illegible]
PP = Graphics[illegible]
UU = Graphics[illegible]
LPP = Graphics[illegible]
LUU = Graphics[illegible], f[illegible]
Show[illegible], LPP, LUU, DisplayFunction ® $DisplayFunction[illegible]
```

...Graphics ..

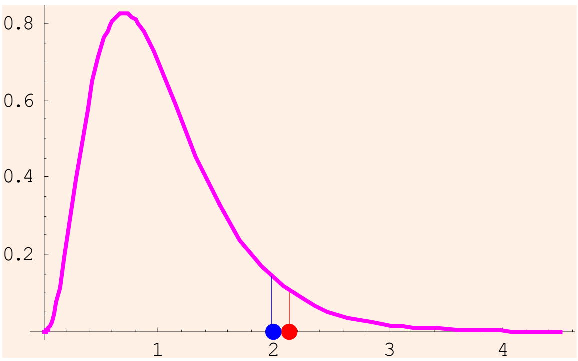
```
Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.
```



Estadístico F de Snedecor

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
m= 7;
n= 75;
Vobs= 1.9835358;
gdist= [illegible]
cdf [illegible]
A [illegible] x
f [illegible] x
TT=
 Plot [illegible] PlotStyle [illegible] Thickness [illegible] DisplayFunction® Identity
Vcrit= Solve [illegible]
Vcrit= x [illegible]
PP= Graphics [illegible]
UU= Graphics [illegible]
LPP= Graphics [illegible]
LUU= Graphics [illegible] Vobs, f [illegible]
Show [illegible] LPP, LUU, DisplayFunction® $DisplayFunction [illegible]
```

...Graphics ..

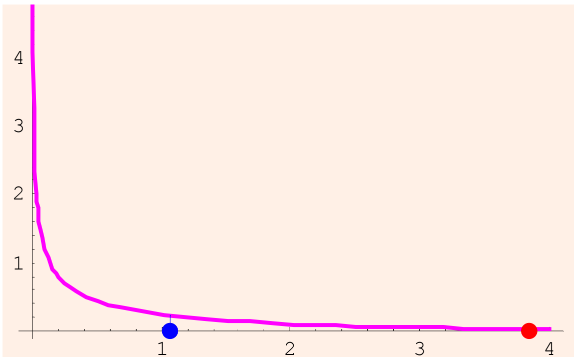


B-Condición de Engel

Estadístico Chi-cuadrado

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
n= 1;
Vobs= 1.0657405;
gdist= ChiSquareDistribution
cdf
A
f
TT=
 Plot              PlotStyle®          Thickness            DisplayFunction® Identity
Vcrit= Solve
Vcrit= x
PP= Graphics
UU= Graphics
LPP= Graphics
LUU= Graphics                                        f
Show TT, PP, UU, LPP, LUU, DisplayFunction® $DisplayFunction
```

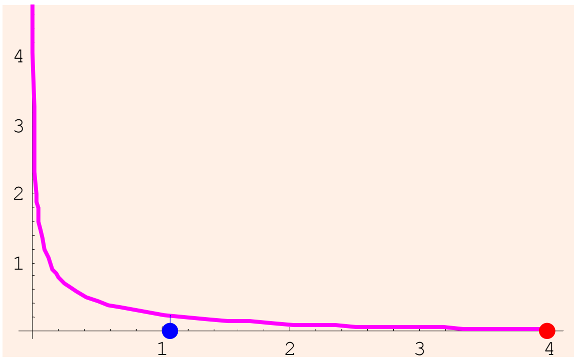
…Graphics…



Estadístico F de Snedecor

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
m= 1;
n= 75;
Vobs= 1.0657405;
gdist= FRatioDistribution
cdf
A
f
TT=
 Plot              PlotStyle®          Thickness            DisplayFunction® Identity
Vcrit= Solve
Vcrit= x
PP= Graphics
UU= Graphics
LPP= Graphics
LUU= Graphics                                        f
Show TT, PP, UU, LPP, LUU, DisplayFunction® $DisplayFunction
```

…Graphics…

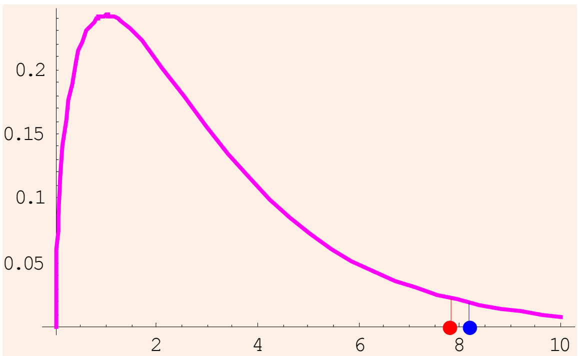


C-Condición de Homogeneidad

Estadístico Chi-cuadrado

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
n= 3;
Vobs= 8.1786076;
gdist= ChiSquareDistribution
cdf
A
f
TT=
 Plot                    , PlotStyle                    Thickness         , DisplayFunction® Identity
Vcrit= Solve
Vcrit= x
PP= Graphics
UU= Graphics
LPP= Graphics
LUU= Graphics
Show                  LPP, LUU, DisplayFunction® $DisplayFunction
```

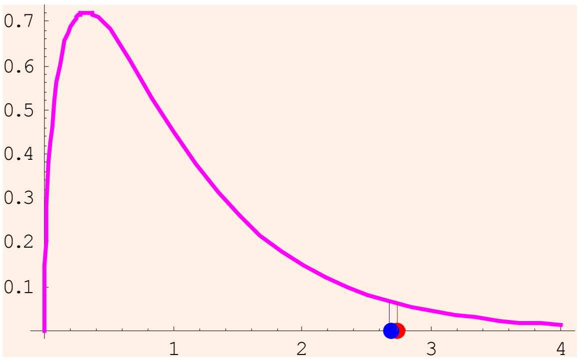
...Graphics ..



Estadístico F de Snedecor

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
m= 3;
n= 75;
Vobs= 0.05 2.7 ...
gdist= ...
cdf ...
A ...
f ...
TT=
 Plot ... Skewness 0. ... DisplayFunction® Identity
Vcrit= Solve ...
Vcrit= x ...
PP= Graphics ...
UU= Graphics ...
LPP= Graphics ...
LUU= Graphics ... f ...
Show TT, ... UU, LPP, LUU, DisplayFunction® $DisplayFunction
```

...Graphics ..

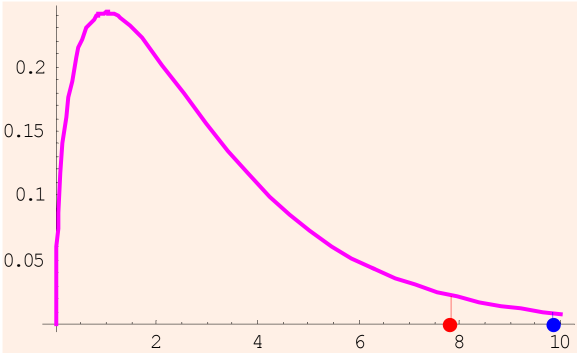


D-Condición de Simetría

Estadístico Chi-cuadrado

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
n= 3;
Vobs= 9.8540952;
gdist= ChiSquareDistribution ...
cdf ...
A ...
f ...
TT=
 Plot ... Skewness 0. ... DisplayFunction® Identity
Vcrit= Solve ...
Vcrit= x ...
PP= Graphics ...
UU= Graphics ...
LPP= Graphics ...
LUU= Graphics ... f ...
Show TT, ... UU, LPP, LUU, DisplayFunction® $DisplayFunction
```

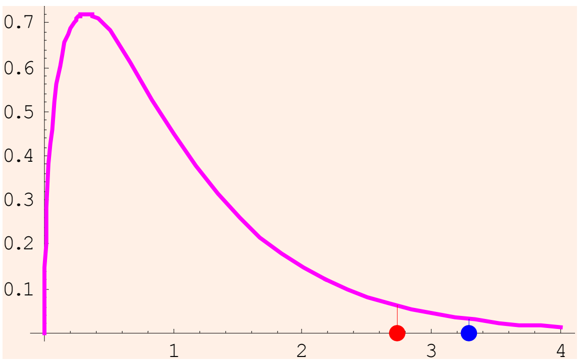
...Graphics ..



Estadístico F de Snedecor

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
m= 3;
n= 75;
Vobs= 3.2846984;
gdist= [illegible]
cdf [illegible]
A [illegible] x
f [illegible], x
TT=
 Plot [illegible] PlotStyle® [illegible] Thickness [illegible] DisplayFunction® Identity
Vcrit= Solve [illegible]
Vcrit= x [illegible]
PP= Graphics [illegible]
UU= Graphics [illegible]
LPP= Graphics [illegible]
LUU= Graphics [illegible] Vobs, f [illegible]
Show [illegible] LPP, LUU, DisplayFunction® $DisplayFunction [illegible]
```

...Graphics ..



EVIEW-S

Uno de los mejores y más conocidos software econométricos es Econometric Views (E-views). La clave para el dominio en el manejo de E-views es conocer y manejar con soltura los distintos tipos de objetos que permite crear el programa. A continuación,

utilizaremos E-views para estimar nuestras funciones de demanda por MCO y SUR.
Para ello se puede recurrir a dos tipos de objeto: Pool o System.
Las salidas de máquinas obtenidas para cada caso son:

Sistema de Ecuaciones (System), por MCO

System: DDAS
Estimation Method: Least Squares
Date: 09/17/02 Time: 19:34
Sample: 1 30
Included observations: 30
Total system (balanced) observations 90

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-4.856952	1.505938	-3.225200	0.0019
C(2)	-0.572943	0.220048	-2.603713	0.0111
C(3)	0.072491	0.168340	0.430621	0.6680
C(4)	-0.203316	0.138247	-1.470673	0.1456
C(5)	1.426510	0.227692	6.265100	0.0000
C(6)	-4.311034	1.756918	-2.453747	0.0165
C(7)	0.190879	0.256722	0.743527	0.4595
C(8)	-0.632340	0.196395	-3.219727	0.0019
C(9)	0.135133	0.161288	0.837838	0.4048
C(10)	1.140617	0.265639	4.293865	0.0001
C(11)	1.016591	0.635137	1.600585	0.1137
C(12)	-0.250389	0.092806	-2.697972	0.0086
C(13)	-0.144291	0.070998	-2.032327	0.0457
C(14)	-0.965171	0.058306	-16.55341	0.0000
C(15)	0.879708	0.096030	9.160756	0.0000
Determinant residual covariance		7.57E-05		

Equation:
LOG(Q_A)=C(1)+C(2)*LOG(P1)+C(3)*LOG(P2)+C(4)*LOG(P3)+C(5)*LOG(Y)
Observations: 30

R-squared	0.654497	Mean dependent var	2.212293
Adjusted R-squared	0.599217	S.D. dependent var	0.619642
S.E. of regression	0.392279	Sum squared resid	3.847074
Durbin-Watson stat	2.169568		

Equation:
LOG(Q_B)=C(6)+C(7)*LOG(P1)+C(8)*LOG(P2)+C(9)*LOG(P3)+C(10)*LOG(Y)
Observations: 30

R-squared	0.561826	Mean dependent var	1.948555
Adjusted R-	0.491718	S.D. dependent var	0.641930

squared			
S.E. of regression	0.457657	Sum squared resid	5.236240
Durbin-Watson stat	1.999440		

Equation:
LOG(Q_C)=C(11)+C(12)*LOG(P1)+C(13)*LOG(P2)+C(14)
*LOG(P3)+C(15)*LOG(Y)
Observations: 30

R-squared	0.938128	Mean dependent var	3.599221
Adjusted R-squared	0.928228	S.D. dependent var	0.617559
S.E. of regression	0.165446	Sum squared resid	0.684307
Durbin-Watson stat	2.240218		

Sistema de Ecuaciones (System), por SUR:

System: DDASISTEMA
Estimation Method: Seemingly Unrelated Regression
Date: 09/17/02 Time: 19:38
Sample: 1 30
Included observations: 30
Total system (balanced) observations 90

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-4.856952	1.374727	-3.533030	0.0007
C(2)	-0.572943	0.200876	-2.852224	0.0056
C(3)	0.072491	0.153672	0.471722	0.6385
C(4)	-0.203316	0.126202	-1.611041	0.1114
C(5)	1.426510	0.207853	6.863073	0.0000
C(6)	-4.311034	1.603840	-2.687946	0.0089
C(7)	0.190879	0.234354	0.814493	0.4179
C(8)	-0.632340	0.179284	-3.527034	0.0007
C(9)	0.135133	0.147235	0.917806	0.3617
C(10)	1.140617	0.242494	4.703694	0.0000
C(11)	1.016591	0.579798	1.753353	0.0836
C(12)	-0.250389	0.084720	-2.955480	0.0042
C(13)	-0.144291	0.064812	-2.226303	0.0290
C(14)	-0.965171	0.053226	-18.13336	0.0000
C(15)	0.879708	0.087663	10.03511	0.0000
Determinant residual covariance		7.57E-05		

Equation:
LOG(Q_A)=C(1)+C(2)*LOG(P1)+C(3)*LOG(P2)+C(4)
*LOG(P3)+C(5)*LOG(Y)
Observations: 30

R-squared	0.654497	Mean dependent var	2.212293

Adjusted R-squared	0.599217	S.D. dependent var	0.619642
S.E. of regression	0.392279	Sum squared resid	3.847074
Durbin-Watson stat	2.169568		

Equation: LOG(Q_B)=C(6)+C(7)*LOG(P1)+C(8)*LOG(P2)+C(9)*LOG(P3)+C(10)*LOG(Y)
Observations: 30

R-squared	0.561826	Mean dependent var	1.948555
Adjusted R-squared	0.491718	S.D. dependent var	0.641930
S.E. of regression	0.457657	Sum squared resid	5.236240
Durbin-Watson stat	1.999440		

Equation: LOG(Q_C)=C(11)+C(12)*LOG(P1)+C(13)*LOG(P2)+C(14)*LOG(P3)+C(15)*LOG(Y)
Observations: 30

R-squared	0.938128	Mean dependent var	3.599221
Adjusted R-squared	0.928228	S.D. dependent var	0.617559
S.E. of regression	0.165446	Sum squared resid	0.684307
Durbin-Watson stat	2.240218		

Vemos que los estimadores son los mismos que los obtenidos con Gauss. Comparando ambas salidas, se nota que coinciden por completo en los resultados obtenidos, excepto por las desviaciones estándares de los coeficientes (lo que obviamente también modifica los valores observados de sus t-valores las probabilidades asociadas de dichos t-valores). Ello nos indica que si bien los estimadores MCO y SUR son los mismos, los últimos son más eficientes ya que poseen una variabilidad menor.

Pool, por MCO

Dependent Variable: LOG(Q?)
Method: Seemingly Unrelated Regression
Date: 09/17/02 Time: 19:33
Sample: 1 30
Included observations: 30
Total panel (balanced) observations 90

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
K1?	-4.856952	1.374727	-3.533030	0.0007
K2?	-0.572943	0.200876	-2.852224	0.0056
K3?	0.072491	0.153672	0.471722	0.6385
K4?	-0.203316	0.126202	-1.611041	0.1114

K5?	1.426510	0.207853	6.863073	0.0000
K6?	-4.311034	1.603840	-2.687946	0.0089
K7?	0.190879	0.234354	0.814493	0.4179
K8?	-0.632340	0.179284	-3.527034	0.0007
K9?	0.135133	0.147235	0.917806	0.3617
K10?	1.140617	0.242494	4.703694	0.0000
K11?	1.016591	0.579798	1.753353	0.0836
K12?	-0.250389	0.084720	-2.955480	0.0042
K13?	-0.144291	0.064812	-2.226303	0.0290
K14?	-0.965171	0.053226	-18.13336	0.0000
K15?	0.879708	0.087663	10.03511	0.0000
Weighted Statistics				
Log likelihood	14.62301			
Unweighted Statistics				
R-squared	0.879891		Mean dependent var	2.586689
Adjusted R-squared	0.857471		S.D. dependent var	0.955899
S.E. of regression	0.360881		Sum squared resid	9.767621
Durbin-Watson stat	2.130663			

Pool, por SUR

Dependent Variable: LOG(Q?)
Method: Pooled Least Squares
Date: 09/17/02 Time: 20:02
Sample: 1 30
Included observations: 30
Total panel (balanced) observations 90

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
K1?	-4.856952	1.385401	-3.505809	0.0008
K2?	-0.572943	0.202435	-2.830248	0.0060
K3?	0.072491	0.154866	0.468087	0.6411
K4?	-0.203316	0.127182	-1.598628	0.1141
K5?	1.426510	0.209467	6.810194	0.0000
K6?	-4.311034	1.385401	-3.111758	0.0026
K7?	0.190879	0.202435	0.942915	0.3488
K8?	-0.632340	0.154866	-4.083147	0.0001
K9?	0.135133	0.127182	1.062518	0.2914
K10?	1.140617	0.209467	5.445333	0.0000
K11?	1.016591	1.385401	0.733788	0.4654
K12?	-0.250389	0.202435	-1.236884	0.2200
K13?	-0.144291	0.154866	-0.931720	0.3545
K14?	-0.965171	0.127182	-7.588907	0.0000
K15?	0.879708	0.209467	4.199745	0.0001
R-squared	0.879891		Mean dependent var	2.586689

Adjusted R-squared	0.857471	S.D. dependent var	0.955899
S.E. of regression	0.360881	Sum squared resid	9.767621
Log likelihood	14.62301	F-statistic	39.24528
Durbin-Watson stat	2.130663	Prob(F-statistic)	0.000000

Tanto por Pool como pos System, las salidas coinciden.

Como se aprecia bajo todos los programas los resultados son idénticos. El fin de esta sección era mostrar las diversas formas de implementar el Método SUR en los distintos lenguajes que proveen cada uno de los softwares utilizados y apreciar la versatilidad de los mismos.