Producción y Costos: un Enfoque Algebraico, Conceptual y Geométrico

Jorge Mauricio Oviedo [1]

Resumen: En este artículo se analiza con máximo detalle la Teoría de la Producción y los Costos. Se describen su conformación, sus parámetros y los cambios que se producen en el mismo ante alteraciones en alguno de ellos. Se provee de un triple fundamento en cada resultado alcanzado: Análisis Geométrico, Análisis Algebraico y Análisis Conceptual.

[1] jorviedo@ubp.edu.ar

La función de Producción

La función de Producción algebraicamente es una función de dos variables que indica para cada nivel de utilización de dos insumos productivos, un número que representa la cantidad total de producto que se puede obtener. Así a medida que dicho número es mas grande, mayor es el nivel de producción que puede obtenerse. De alguna manera la Función de Producción de una empresa describe todas las interrelaciones que se llevan a cabo entre los insumos y producto a lo largo de todo el proceso productivo.

Algebraicamente se lo representa así:

$$Q = Q(L, K)$$

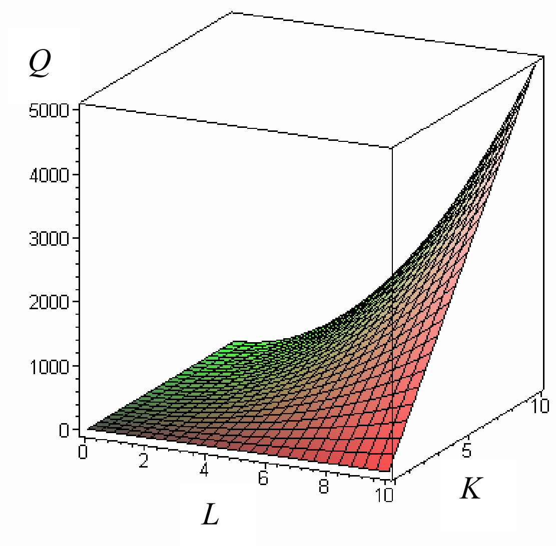
Donde Q(L,K) representa a una función genérica de dos variables.

Supongamos por ejemplo que una empresa posee un proceso productivo representado por la siguiente función de Producción:

$$Q(L, K) = 5L^2K$$

Donde Q es la cantidad de producción, L la cantidad de insumo Trabajo a utilizar y K la cantidad del insumo Capital empleado

Las mismas pueden representarse gráficamente por la siguiente figura que muestra en una gráfica en 3D la función de Producción:



Obsérvese que el dominio de la Función de Producción lo constituye el plano (L,K), es decir el espacio de insumos productivos, y sobre ese dominio y a cada punto del mismo se le asocia un punto sobre el eje vertical cuya altura representa el nivel de Producción. De esta manera si tuviésemos que comparar dos pares de insumos, para analizar cual de ellos permite alcanzar un nivel de producción mayor solo deberíamos identificar en el dominio dichos pares de insumos y ver cual de ellos tiene asociado un punto sobre el eje vertical a mayor altura.

Analicemos lo anterior con un ejemplo.

Supongamos además que se quieren comparar dos planes de producción[2]:

A: (1,7)

B: (2,3)

Donde el primer componente de cada par ordenado indica las cantidades a utilizar del insumo trabajo L y la segunda componente las cantidades de K, el insumo Capital. ¿Cuál de éstos planes de producción permitirá obtener una producción mayor de Q? Para responder dicha pregunta procedamos a evaluar los planes de producción en la función de Producción Q, como sigue:

$$Q(1,7) = 35$$
$$Q(2,3) = 60$$

Esto indica que el plan B permite alcanzar una producción mayor que el plan de producción A.

Produto Marginal

Otro elemento muy importante que se desprende de la función de Producción es el Producto Marginal. Este última indica cuanto se incrementa el nivel de producción como consecuencia de aumentar en una unidad la utilización de uno de los insumos y mantener constante la utilización del otro.

Algebraicamente el Producto Marginal del insumo L por ejemplo, no es otra cosa más que la derivada parcial de Q con respecto a L, así:

$$PMg_L(L,K) = \frac{\partial Q(L,K)}{\partial L}$$

Y de manera similar para el Producto Marginal de K

$$PMg_K(L,K) = \frac{\partial Q(L,K)}{\partial K}$$

Obsérvese como ambos Productos Marginales son funciones de dos variables, implicando ello que su valor depende de la utilización de insumos (L, K) que la empresa está llevando a cabo.

Si continuamos con el ejemplo anterior podríamos entonces computar las funciones de Producto Marginal de L como sigue:

$$PMg_L(L,K) = \frac{\partial Q(L,K)}{\partial L} = 10KL$$

A su vez podríamos computar el valor del PMgk en el plan de producción A, asi:

$$PMg_L(1,7) = 70$$

Ese valor de 70 indica que si la empresa esta utilizando 1 unidad de L y 7 unidades del bien K, entonces si quisiera aumentar la utilización del insumo L en una unidad, su producción total, Q, se incrementaría en 70 unidades.

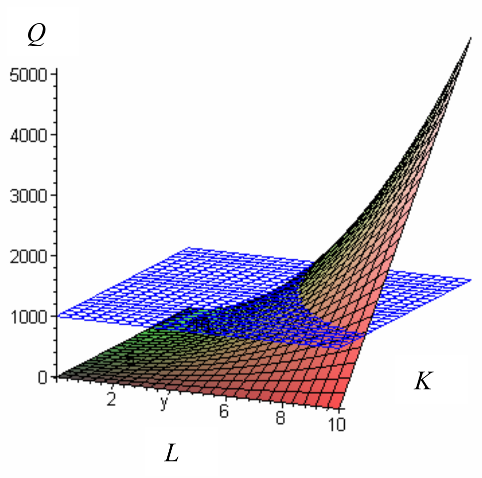
Algo similar podría calcularse para el caso de la QMgk.

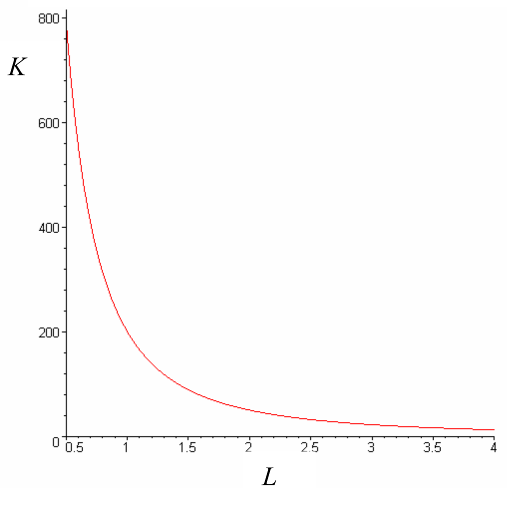
[2] Un plan de producción es una combinación de insumos (L,K) que permiten obtener un determinada cantidad de producto

Isocuantas

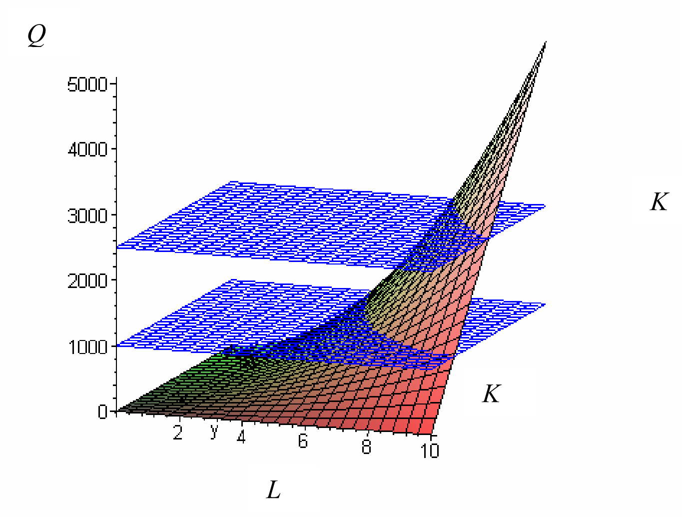
Uno de los elementos más importantes de la Teoría de La producción y los Costos lo constituye un instrumento de análisis denominado Isocuantas. Las mismas indican conceptualmente un conjunto de combinaciones de insumos (L,K) que permiten alcanzar un nivel de producción constante, es decir todas esas combinaciones de L y K tienen la propiedad que producen exactamente el mismo nivel de producción. En términos algebraicos y geométricos las Isocuantas no son otra cosa mas que las Curvas de Nivel de una Función de dos Variables, es decir el conjunto de puntos (L,K) tales que conceden a la función el mismo valor, la misma altura en la gráfica.

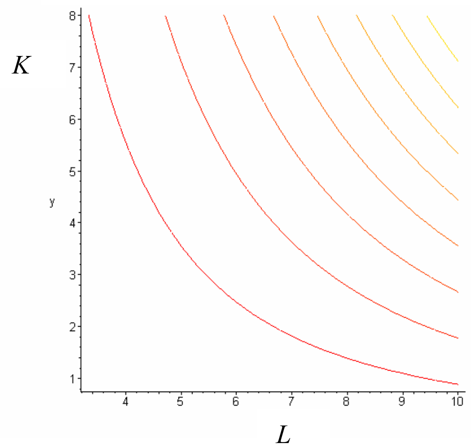
Para derivar geométricamente una Isocuanta lo que debemos hacer es cortar la gráfica de Q con un plano horizontal ubicado a una altura constante tal como se muestra en color azul en la gráfica de la izquierda ubicada mas abajo. Luego la sección de la gráfica en 3D que es intersectada por el plano azul debe proyectarse contra el plano del piso donde emerge la gráfica de Q, es decir el plano del dominio (L,K). Si identificamos cada uno de esos puntos y los representamos en una gráfica de dos dimensiones podemos trazar una curva como la que se muestra a la derecha del gráfico a continuación. Dicha curva es la Isocuanta asociada a un nivel de Producción de 1000 unidades de producto, pues cada uno de esos puntos tiene la propiedad que al ser evaluados en la función de Producción otorgan a Q un valor constante e igual a 1000.





De manera similar podemos hallar las Isocuantas asociadas a distintos niveles de producción constante. Como se muestra en la gráfica de mas abajo, si procedemos a cortar la grafica de Q con sucesivos planos ubicados a distintas alturas podremos trazar distintas Isocuantas cada una asociada a distintos niveles de Producción. Se puede observar también que a medida que cortamos la gráfica con planos a una altura cada vez mayor, y por lo tanto a un nivel de producción mayor, las Isocuantas asociadas a niveles de producción mayores se encuentran cada vez mas alejada del origen tal como lo muestra la gráfica de abajo a la derecha. Esto implica que cualquier combinación de insumos que se encuentre sobre una misma Isocuanta permiten producir la misma cantidad de Producto Q, pero las combinaciones de (L,K) ubicadas en Isocuantas mas alejadas del origen alcanzan niveles de producción mayores.





Restaría entonces determinar la expresión algebraica que permite representar a las Isocuantas. Continuando con el ejemplo anterior si deseamos computar la expresión algebraica de la Isocuanta asociada a un nivel de Producción de 1000 unidades de Q debemos igualar la expresión de la función de Producción al nivel de Q deseado, 1000 en este caso:

$$1000 = 5L^2K$$

Así, todos los pares (L,K) que cumplan con dicha condición garantizan un nivel de producción de 1000 unidades a esta empresa.

Luego de ahí podemos despejar K con lo que resulta:

$$K = \frac{200}{L^2}$$

Que es la expresión analítica de la función que describe la Isocuanta asociada a un nivel de Producción de 1000 unidades dada la función de Producción que representa el proceso productivo de esta empresa hipotética.

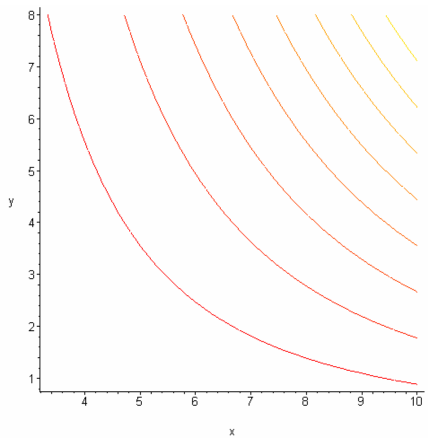
De manera más general, podemos encontrar el conjunto de todas las Isocuantas asociadas a un nivel de producción paramétrico Q, como sigue:

$$\bar{Q} = 5L^2K$$

$$K = \frac{\bar{Q}}{5L^2}$$

Luego ésa es la expresión para generar todas las Isocuantas posibles, para la cual solo se debe asignar a Q el valor de producción deseado y la fórmula anterior automáticamente entregará la función algebraica que describe exactamente la Isocaunta asociada al nivel de

Producción deseado dado una función de Producción. El conjunto de todas las Isocuantas se denomina ***Mapa de Isocuantas*** y la expresión algebraica que la describe es la anterior. Obsérvese además como valores cada vez mas grades de Q hacen que la gráfica de las Curvas de Indiferencias se encuentren cada vez mas alejadas del origen como en el siguiente gráfico:



Otra situación importante de analizar sería la manera de hallar la Isocuanta que pasa por una determinada combinación de insumos (L,K). Así por ejemplo, podríamos estar interesados en conocer todas las combinaciones de L y K que permiten producir un nivel de Q idéntico al que produce el plan de producción A = (1,7) como vimos en el ejemplo anterior.

Como recordaremos, e plan de producción A permitía producir un nivel de Q igual a 35 unidades, por lo que el problema se transforma en hallar el conjunto de pares (L,K) que permiten producir 35 unidades de Q.

En efecto, si reemplazamos en la fórmula del Mapa de Isocuantas Q = 35 resulta:

$$K = \frac{\bar{Q}}{5L^2}$$

$$K = \frac{7}{L^2}$$

Alternativamente, efectuando todos los cálculos anteriores, es decir encontrando los pares (L,K) que permiten producir un nivel de producción idéntico al del plan de producción A, resulta:

$$Q(1,7) = 5L^2K$$

$$35 = 5L^2K$$

$$K = \frac{35}{5L^2}$$

$$L = \frac{7}{L^2}$$

Luego todas las combinaciones de insumos la cantidad de Capital K se relacione como lo indica la expresión anterior con L, cumplirán con la condición producir un nivel de producto idéntico al del plan de producción A.

Tasa Marginal de Sustitución Técnica

Íntimamente vinculado al concepto de Isocuanta surge el de ***Tasa Marginal de Sustitución Técnica*** (TMST). Este no es otra cosa más que la pendiente de la Isocuanta asociado a un nivel dado de producción. En Términos conceptuales, dicha pendiente y por ende la TMST, se puede interpretar como la cantidad de unidades del insumo K que se debe dejar de emplear en el proceso productivo para incrementar en una unidad la utilización del Insumo de L y seguir produciendo el mismo nivel de producto anterior.

En términos algebraicos, la TMST no es otra cosa más que la derivada de la Isocuanta con respecto a L y evaluada en el plan de producción en cuestión.

Alternativamente, la TMS en un punto puede computarse como se explica a continuación. Si calculamos la diferencial total de la función, es decir el incremento en la Producción como consecuencia de modificar la utilización de los insumos L y K, resulta:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial L} dL + \frac{\partial Q}{\partial K} dK$$

Pero como en una Isocuantas los cambios en L y en K son tales que el nivel de producto no varía, el Diferencial Total de la función de Producción debe ser cero:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Reagrupando términos resulta:

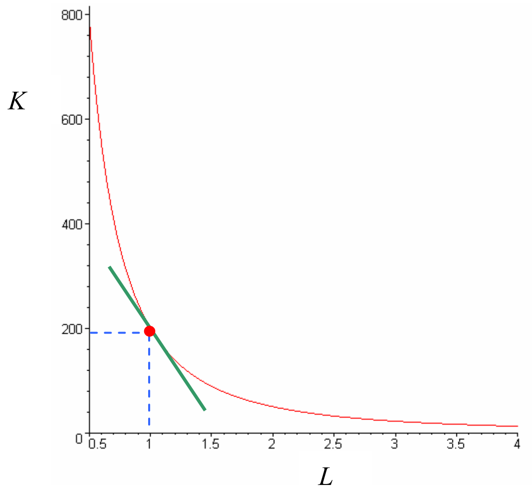
$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}(L,K)}{\frac{\partial Q}{\partial K}(L,K)} = -\frac{PMgL(L,K)}{PMgK(L,K)}$$

Es decir, si queremos computar la TMST en un punto dado, lo que debemos hacer es computar previamente los Productos Marginales de L y de K, valuarlos en el plan de producción en la cual deseamos calcular la TMST y cambiarle el signo.

Veamos un ejemplo, continuando con la función de Producción del Ejemplo anterior, supongamos que deseamos calcular la TMST en la cesta de consumo (1,200), aplicando las fórmulas resulta:

$$TMST(L,K) = -\frac{PMgL(L,K)}{PMgK(L,K)} = -\frac{10LK}{5L^2} = -\frac{2K}{L} =$$

$$TMST(1,200) = -\frac{2*200}{1} = -400$$



Esto indica que si la empresa actualmente está produciendo en el plan de producción (1,200) y desea incrementar en una unidad adicional[3] la utilización del insumo L deberá dejar de utilizar 400 unidades de K para obtener el mismo nivel de producción que obtenía antes con el uso de (L=1, K=200).

Obsérvese como la TMST es una especie de $CO_{L/K}$ subjetivo y propio de cada empresa, el cual depende del proceso productivo descrito por la Función de Producción y el nivel de utilización actual de insumos (L,K). En otras palabras, la TMST es lo que denominamos la ***Valoración Subjetiva de la Empresa*** *del Insumo L en términos del Insumo K* en el sentido de que para esa empresa, dadas las características de su proceso productivo (de ahí lo subjetivo) y su nivel actual de utilización, valora una unidad de L en 400 unidades de K y a esa "tasa" está dispuesto a intercambiar un insumo por otro, pues es ese el valor que para la empresa el insumo L tiene.

Función Costos de Corto Plazo

Una de las funciones más íntimamente ligadas a las funciones de Producción son las funciones de Costos. Aquí es útil distinguir entre el corto y el largo plazo. El Corto Plazo podemos definirlo como aquel periodo de tiempo en el que al menos uno de los insumos productivos no puede modificarse su utilización, es decir durante ese periodo uno de los insumos permanece "fijo". El Largo Plazo lo definimos como aquel periodo de tiempo lo suficientemente grande como para que pueden variarse libremente la utilización de todos los insumos o factores productivos. Así, tradicionalmente se suele suponer que el insumo Capital, K, suele tardar mas tiempo poder modificarse, ya que generalmente dicho insumo va asociado a la idea de tamaño de la planta de producción. Así de esta manera suele tardar mucho tiempo incrementar el tamaño de la planta de producción que en aumentar la contratación de trabajo.

[3] En estricto rigor, al estar trabajando con cantidades infinitesimales, una interpretación mas precisa es la siguiente: *Si se desea incrementar la utilización del insumo L en un infinitésimo se deben dejar de utilizar 400 unidades de K por cada unidad de aumento de L para seguir produciendo lo mismo*. Nótese que el "400" es en realidad una "tasa" es decir un tanto por uno, (variación de K por incremento unitario de L) pero en realidad en lo que aumenta la utilización de L es un infinitésimo.

Hechas estas aclaraciones, en el corto plazo vamos a suponer que el stock de Capital permanecerá fijo mientras que solo puede modificarse el insumo Trabajo, L.
Un interrogante importante en materia de costos suele ser tratar de deducir, de derivar la función de Costos de una empresa a partir de la función de Producción de la misma. Para ello definamos primero de manera precisa Función de Costos.
Una Función de Costos Totales, es una expresión funcional que permite conocer para cada nivel de producción deseado, el Costo Total de producir la misma.
Supongamos que una empresa posee una función de producción dada por:

$$Q(L,K) = 3LK$$

Que opera en el Corto Plazo con un stock fijo de Capital de 50 unidades y en donde además los precios de los factores productivos L y K son de 10 y 20 respectivamente.
Para ello construyamos la función de Producción de Corto Plazo, en la que al estar fijo el stock de capital en 50 la misma dependerá sólo del insumo L. Así, sustituyendo K por 50 en la expresión anterior resulta:

$$Q(L) = 150L$$

Por otro lado sabemos que los Costos de la Empresa están dados por los respectivos gastos que se realizan en utilizar L y K por lo que la expresión general de los Costos será:

$$CT = wL + rK$$

Donde *w* es el precio unitario del insumo L y *r* el precio unitario de cada unidad de K.
Sustituyendo con los datos del ejemplo resulta:

$$CT = 10L + 1000$$

Sin embargo, una función de Costos debe indicar para cada nivel de Producción su costo total, es decir debe depender de Q y no de L como en la expresión anterior.
Para arribar entonces a la función de Costos se debe reemplazar L en la expresión anterior por la cantidad de Trabajo necesario para producir un nivel de producción general e igual a Q. Así:

$$Q = 3LK$$
$$Q = 3L50$$
$$Q = 150L$$
$$L = \frac{Q}{150}$$

Esta última expresión es lo que podemos denominar función de producción inversa en el sentido que dicha función indica para cada nivel de producción deseado Q la cantidad de insumo L que permite obtenerlo[4].
De esta manera, sabiendo entonces cuantas unidades de L necesitamos para producir cada nivel de producto deseado, para conocer su costo simplemente debemos multiplicar dicha

[4] Compare esa definición con la de Función de Producción en donde ésta indica para cada cantidad de insumo L empleado la cantidad de producto que se puede obtener. De ahí el nombre de Función de Producción Inversa

expresión por el precio de L y sumarle los gastos que se realizaron en contratar el stock de capital, así:

$$\begin{aligned} CT(Q) &= wL + rK \\ &= 10L + 20*50 \\ &= 10L + 1000 \\ &= 10\frac{Q}{150} + 1000 \\ CT(Q) &= 100 + \frac{Q}{15} \end{aligned}$$

Luego dicha expresión funcional indica para cada nivel de producción el Costo Total de producirla. Es por lo tanto la ***Función de Costos de Corto Plazo*** que buscábamos. Obsérvese también como la función de Costos permite distinguir Costos Fijos de Costos Variables.

Los ***Costos Fijos*** son aquellos costos asociados a la adquisición de insumos que permanecen fijo bajo el periodo de análisis, en este caso las 50 unidades de K que cada una cuestan \$20, o lo que es lo mismo los términos que no dependen de Q en la expresión anterior (es decir los costos que no varían con el nivel de producción). Así en la expresión anterior los Costos Fijos ascienden a 50*20 = 1000, es decir el término independiente de la función.

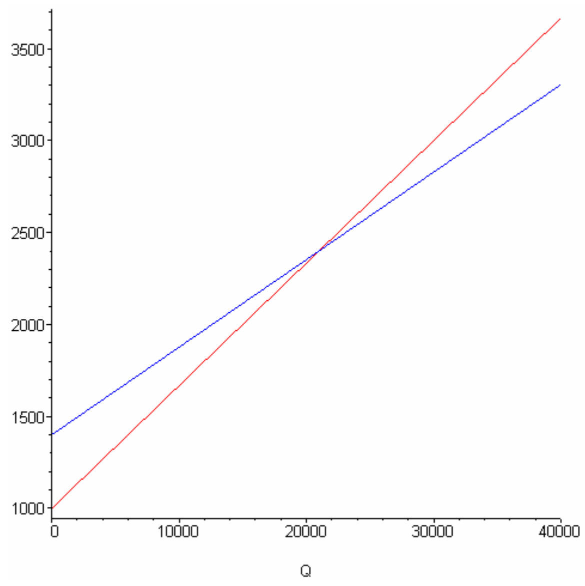
Los ***Costos Variables*** son los asociados a los insumos que pueden variar libremente su utilización a medida que varía el nivel de producción, que en el caso de nuestro ejemplo es el término Q/15.

Uno podría ahora preguntarse como se modificaría la función anterior si el tamaño de la planta aumenta a K = 70 primero

Efectuando todos los cálculos al igual que recién resulta:

$$CT = 1400 + \frac{Q}{21}$$

Con lo cual observamos que como resultado del aumento del tamaño de Planta los Costos Fijos aumentaron pero los Variables se redujeron. En términos geométricos, la ordenada al origen aumento y la pendiente disminuyó. Representando ambas gráficas en un mismo dibujo para compararlas, en rojo la primera y azul la segunda, resulta:



De la misma se desprende que dependiendo de cuanto se desee producir resultará mas barato hacerlo con una u otra planta. Así para valores mayores a 25000 es mas barato producir con una planta mayor y para valores de Q menores a 2000, por ejemplo conviene hacerlo con la planta más pequeña.

En general, para hallar la Función de Costos De Corto Plazo para un tamaño genérico de planta igual a K, se debe proceder como lo muestran los cómputos siguientes

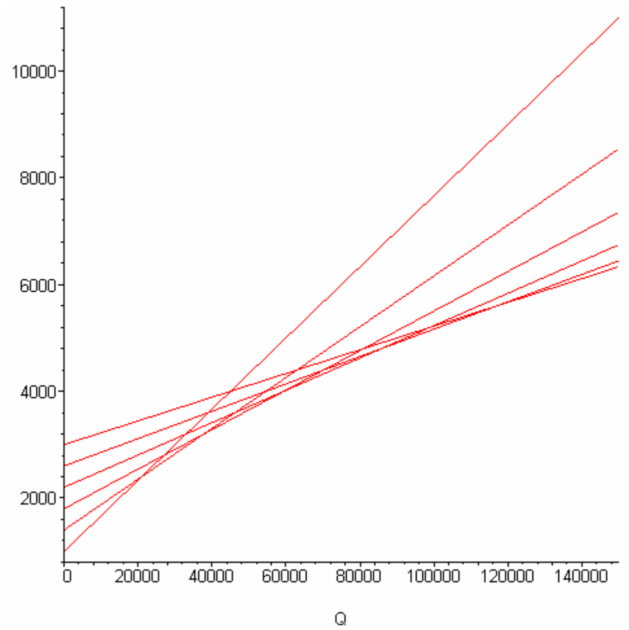
$$Q = 3L\overline{K}$$
$$L = \frac{Q}{3\overline{K}}$$

Ésta última es la expresión genérica de la función inversa de producción para un tamaño de Planta K. Sustituyendo lo anterior en la suma de costos resulta:

$$CT(Q) = wL + rK$$
$$= 10\frac{Q}{3K} + 20K$$

Que es la expresión de Función de Costos para un tamaño de planta genérico igual a K. Se observa que el costo fijo es 20*K y el costo variable 3.33 Q /K, que confirman nuestras conclusiones anteriores de que aumentar la planta aumenta los Costos Fijos y Reduce los variables.

Representando gráficamente funciones de Costos para plantas de tamaño 50, 70, 90, 110 y 130, resulta:



Lo cual muestra al igual que antes que, dependiendo de la cantidad de Q a producir, resulta más barato hacerlo con uno u otro tamaño de planta. Veremos mas detalles de este tema mas adelante cuando abordemos los tópicos relacionados con Costos de Corto y Largo Plazo.

Isocostos

Antes de entrar en el tema de los Costos de Largo Plazo, merece la pena destinar algunos párrafos a un elemento muy útil al analizar dichos tópicos: Las Curvas de Isocostos.

Las Isocostos puede definirse como el conjunto de Insumo L y K cuya utilización y contratación por parte de la empresa, implican para ella un Costo Constante. Para ello suponiendo que la empresa utiliza sólo dos insumos, L y K, en su proceso productivo y que el costo unitario de contratación de cada uno de ellos es w y r respectivamente, la Isocostos asociada a un gasto de C pesos, viene dada por la siguiente ecuación:

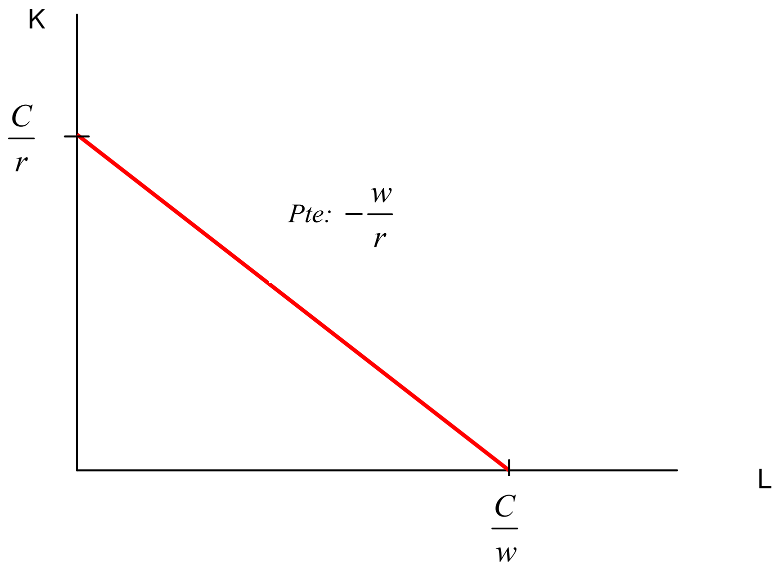
$$wL + rK = C$$

Dicha ecuación determina que el Gasto en el insumo L, es decir las cantidades contratadas de L multiplicadas por su precio mas el Gasto en K (la cantidades contratadas de K multiplicada por el suyo) no pueden superar el Presupuesto o Costo C de la empresa.

Alternativamente podemos obtener la ecuación explícita de la Recta de la Isocostocon solo despejar el valor de K en términos de L, como sigue:

$$K = \frac{C}{r} - \frac{w}{r} X$$

Esta última ecuación nos permite representar en términos geométricos la Isocostos de la siguiente manera:



Donde la ordenada al origen, C/r, se interpreta como la cantidad máxima que se puede contratar de K si no se utiliza nada de L y se desea gastar solo C pesos. Por otro lado la abcisa al origen, C/w, representa lo máximo que se puede adquirir del insumo L dado el presupuesto de la empresa de C pesos.

De esta manera todos los puntos que se encuentran por debajo de la Línea Roja son representan combinaciones de L e K cuya contratación tiene un costo inferior a C. Por otro lado, las combinaciones (L,K) que se encuentran por encima de la Isocosto representan adquisiciones de insumos que superan el Presupuesto C de la empresa.

Un punto importante a destacar es la interpretación económica de la pendiente de la recta anterior. Si uno recuerda la pendiente de la recta es:

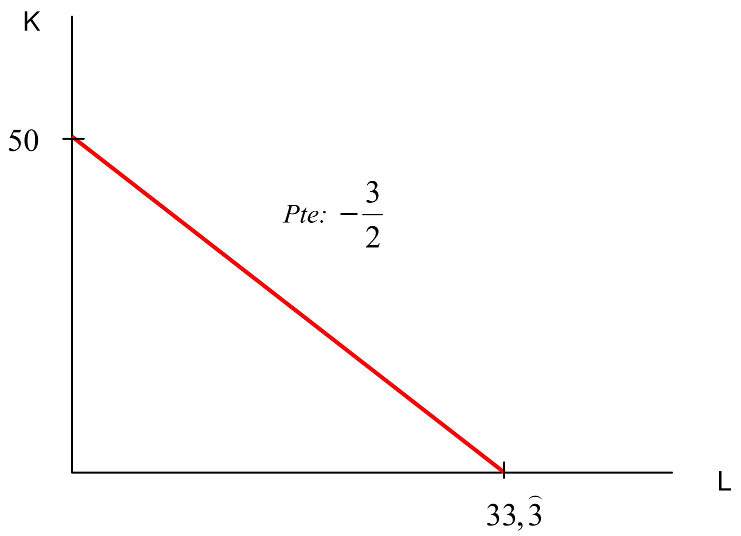
$$\frac{dK}{dL} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{w}{r} = CO_{L/K} = VOM_{L/K}$$

Es decir cuantas unidades de K se deben dejar de contratar si se desea incrementar en una unidad la utilización de L, que no es otra cosa mas que el ***Costo de Oportunidad de L en términos del Bien K*** ($CO_{L/K}$). Ahora bien, ese CO puede interpretase de una manera mas profunda como la ***Valoración Objetiva del Mercado del Insumo L en términos del insumo K*** (VOMx/y), en el sentido de que la expresión de la pendiente $-\frac{w}{r}$ indica cuanto vale en el mercado una unidad de L medida en unidades de K en vez de medirlo en unidades monetarias. Esto significa que cualquier empresa puede adquirir en el mercado una unidad de L entregando dicha cantidad de unidades de K, y dado que cualquier empresa puede llevar a cabo dicho intercambio se dice que ese valoración del mercado es una ***Valoración Objetiva*** pues es independiente de la valoración subjetiva propia que cada empresa pueda tener.

Veamos un ejemplo para aclarar más todos éstos términos

Supongamos que se dispone de un presupuesto de 100 pesos y que se utilizan solo dos insumos, L a un precio de $3 y K a un precio de $2. Bajo estos parámetros la Isocostos en términos algebraicos y geométricos luce así:

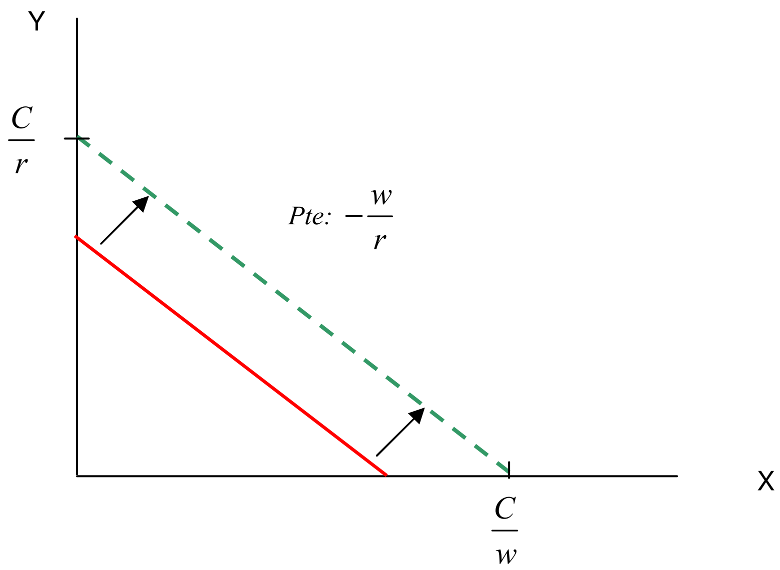
$$K = 50 - \frac{3}{2}L$$



Por la tanto bajo esos parámetros la ordenada al origen indica en términos conceptuales que se puede adquirir un máximo de 50 unidades de Y mientras que la abcisa origen dice que el máximo posible de contratación de L es de 33,3 unidades. Por otro lado la pendiente de la recta presupuestaria indica que el mercado valora al insumo X en 1.5 unidades del insumo K, es decir si uno quiere adquirir una unidad adicional de L debe entregar a cambio 1.5 unidades de K en el Mercado para poder obtenerlo. 1.5 es la tasa a la que el mercado intercambia un insumo por otro.
Veamos a continuación algunos análisis de Estática Comparativa ante la modificación de algunos de los parámetros del Modelo.

Efectos de un incremento en el Costo o Presupuesto

Repasando las estructuras analíticas de las expresiones de abscisas y ordenadas al origen se verifican que ambas aumentan ante un incremento de C por lo que geométricamente la Isocostos se traslada paralelamente hacia la derecha. Obsérvese además que al no haberse modificado los precios la pendiente no se ha cambiado. Conceptualmente el desplazamiento paralelo indica que ahora se pueden contratar una mayor cantidad de ambos INsumos que antes no era posible y en el mercado las relaciones de intercambio no se han modificado, La Valoración Objetiva del Mercado se mantiene constante en este caso.



Alternativamente, una reducción de Costos implicaría que la Isocosto se traslada más hacia el origen, lo cual indica que cuando la Isocosto esté lo mas cerca posible del origen menor será el costo asociado a esa combinación de insumos (L,K). Esto cobrará vital importancia al analizar el próximo tópico referido a Costos de Largo Plazo.

Costos en el Largo Plazo

En el corto plazo, dado que uno de los insumos (K) permanece fijo, la única manera de incrementar la producción era incrementando la utilización de L. En otras palabras, si se deseaba producir un determinada cantidad de Q existía una única cantidad de L que permitía hacerlo, o lo que es lo mismo existe sólo una manera de producir Q. En consecuencia, resultaba relativamente sencillo encontrar la función de Costos de Corto Plaza, pues solo era necesario averiguar la cantidad de L necesario para producir el nivel Q, multiplicar por w (el precio unitario de L) y sumar los Costos Fijos que venia dado por la cantidad fija de K utilizada en el Corto Plazo multiplicada por su precio unitario, *r*.

En el Largo Plazo las cosas son muy distintas desde el punto de vista algebraico pero bastante similares conceptualmente. Esto es así ya que en Largo Plazo, al ser todos los insumos variables, existen infinitas maneras de producir Q unidades de producto final. Todas esas infinitas maneras, como el lector recordará, venía descriptas por todas las combinaciones (L,K) que se encuentran sobre la Isocuanta asociada al nivel deseado de producto Q.

A raíz de esto, dadas las infinitas maneras de producir Q unidades de producto, debemos escoger entre todas ellas, la que permita hacerlo al menor costo posible. Esto último nos invita entonces a resolver un problema de optimización, mas precisamente uno de minimización. Una vez que encontramos las cantidades de insumos (L, K) que permiten producir Q unidades al menor costo posible simplemente multiplicamos cada una de esas cantidades óptimas por sus respectivos precios y las sumamos. Lo que hemos obtenido entonces es el Menor Costo de Producir Q unidades, es decir la Función de Costos de Largo Plazo.

Veamos con un ejemplo la manera de hallar la función de Costos de Largo Plazo dada la función de producción del ejemplo anterior:

$$Q(L,K) = 3LK$$

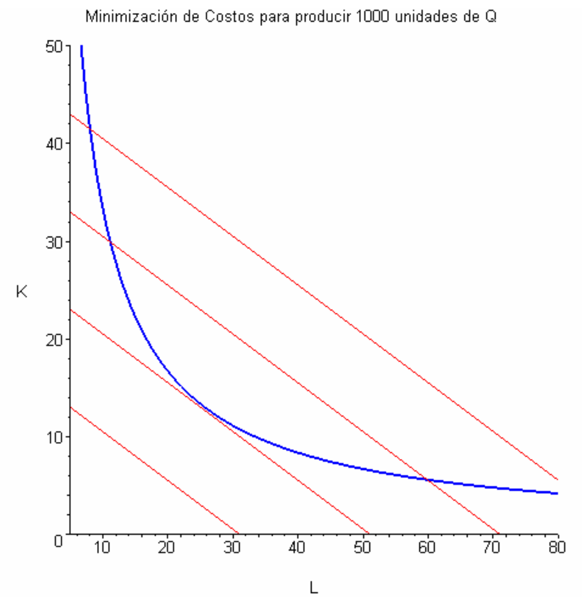
y su poniendo además que los precios de los insumos son de 10 y 20 para L y K respectivamente, igual que antes.

Para comenzar, empecemos hallando la cantidad de insumos que permite minimizar el costo de producir 1000 unidades de Q. Para ello se deberá resolver el siguiente problema de minimización restringido, como sigue:

$$\min_{(L,K)} CT = 10L + 20K$$
$$s.a: \qquad 3LK = 1000$$

Este planteo indica que deben hallarse aquellos valores de L y K que cumpliendo con la restricción de producir 1000 unidades (Isocuanta asociada a un nivel de Q=1000) minimicen el costo total de producción.

Geométricamente, el problema de minimización debe interpretarse como sigue: dado que por cada punto de la Isocuanta (en color azul de la gráfica de más abajo) pasa una única Isocosto (en color rojo), y como las isocostos ubicadas mas cerca del origen poseen un costo menor, la combinación de insumo (L,K) que minimice los Costos Totales de producir 1000 unidades será aquella por la que pase la Isocosto mas cercana al origen. La siguiente gráfica ilustra lo dicho anteriormente:



De esta manera, el problema de la empresa consiste en elegir aquellos punto que posados sobre la Isocuanta, es decir la curva azul, arrojen el mínimo costo de producir 1000 unidades.

Para resolver este problema de optimización restringida despejaremos K de la restricción dada por la isocuanta y lo sustituiremos en la expresión de la suma de los costos con lo cual luego se puede proceder a minimizar como una función de una variable común. En efecto, operando como se dijo se tiene:

$$3LK = 1000$$
$$K = \frac{1000}{3L}$$

Sustituyendo en CT, resulta:

$$\min_{(L,K)} CT = 10L + 20(\frac{1000}{3L})$$

Con lo cual hemos convertido el problema de optimización restringida en uno de optimización libro en una sola variable

Derivando con respecto a L, igualando a cero y despejando L resulta:

$$\frac{d[10L + 20(\frac{1000}{3L})]}{dL} = 0$$
$$10 - \frac{20000}{3L^2} = 0 \Rightarrow L^* = 25.8198$$

Sustituyendo el valor óptimo de utilización de L en la restricción dada por la isocuanta y despejando resulta:

$$K = \frac{1000}{3L}$$
$$K^* = \frac{1000}{3 * 25.8198}$$
$$K^* = 12.9099$$

De esta manera el plan de producción $\left(L^* = 25.8198, \quad K^* = 12.9099\right)$ es la combinación de insumos que permite producir 1000 unidades de Q al menor costo.

A continuación, y con la intención de hallar condiciones generales de optimalidad que valgan para todo tipo de funciones de producción y todo tipo de precios de los insumos, vamos a resolver el siguiente problema de minimización de Costos en su versión más general.

$$\min_{(L,K)} CT = wL + rK$$
$$s.a: \qquad Q(L,K) = \bar{Q}$$

Donde w y r son los precios de los insumos L y K respectivamente, Q(L,K) la función de producción en su versión general, y $\bar{Q}$ el nivel de producción deseado.

Para resolver este problema de optimización restringida general como lo hicimos anteriormente al despejar K de la restricción dada por la isocuanta nos encontraremos que K será una función de L, y esa función la escribimos así:

$$Q(L,K)=\bar{Q}$$
$$K=K\big|_{\bar{Q}}(L)$$

Donde $K\big|_{\bar{Q}}(L)$ no es otra cosa más que una expresión general para expresar la función Isocuanta asociada a un nivel de Producción $\bar{Q}$. Teniendo esto en mente y sustituyendo en CT, resulta:

$$\min_{(L)} CT = wL + r\,K\big|_{\bar{Q}}(L)$$

Con lo cual hemos convertido un problema de optimización restringida en un problema de optimización sin restricciones.

Derivando con respecto a L y recordando que la derivada de la Isocuanta con respecto a L (es decir su pendiente) es la TMST, se obtiene:

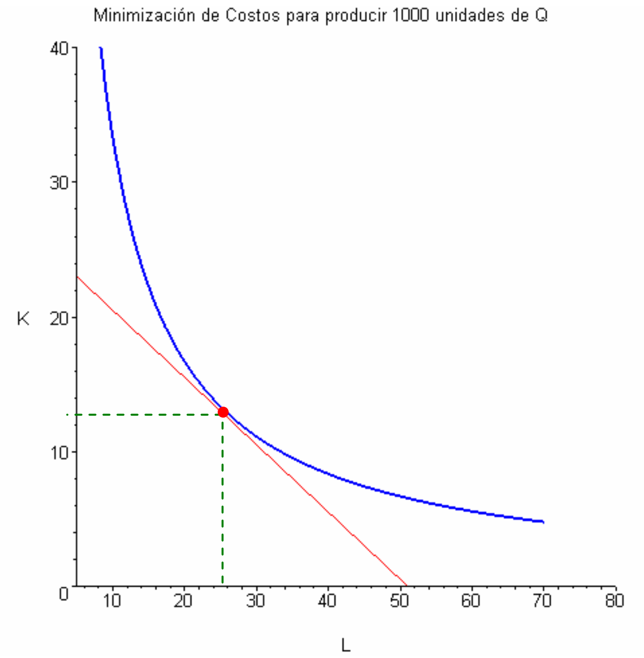
$$\begin{aligned}\frac{\partial CT}{\partial L} &= w + r\frac{d\,K\big|_{\bar{Q}}(L)}{dL}\\ &= w + r\ TMST\\ \frac{\partial CT}{\partial L} &= w - r\frac{PMg_L(L,K)}{PMg_K(L,K)} = 0 \Rightarrow \frac{w}{r} = \frac{PMg_L(L,K)}{PMg_K(L,K)}\end{aligned}$$

Esta última expresión puede indica que la empresa está minimizando los costos de Producción de Q unidades cuando las cantidades utilizadas de L y K son tales que la valoración subjetiva de la empresa con la valoración objetiva del mercado de L en términos de K. En otras palabras, si la valoración de la empresa del insumo L en términos del insumo K es menor que la del mercado, para la empresa el insumo L costará mas caro en el mercado de lo que para el vale y decidirá reducir su utilización. Al revés, si la valoración sujetiva de la empresa es mayor que la del mercado, para esta empresa el bien L estará mas barato en el mercado de lo que para el cuesta por lo que tenderá a incrementar su utilización. Sólo cuando ambas valoraciones coincidan el agente no tendrá incentivos a reducir ni a aumentar la utilización de L y por la tanto se encontrará en su valor óptimo, pues no existe ningún ajuste en su proceso productivo que le permita obtener una costo menor de producción.
Alternativamente, dicha condición de optimalidad puede reescribirse así:

$$\frac{PMg_L(L,K)}{w} = \frac{PMg_K(L,K)}{r}$$

Lo cual indica que una empresa está minimizando sus costos cuando las productividades marginales del último peso gastado en cada uno de los insumos se igualan. Si esta condición no se cumple, es posible reasignar el gasto del presupuesto total (utilizando mas de uno y menos del otro) de modo tal que sus costos sean menores.

Desde el punto de vista geométrico, si interpretamos las condiciones de optimalidad que debe cumplir la cesta óptima vemos que la TMST es la pendiente de la Isocuanta y w/r es la pendiente de la Isocosto, por lo que en el óptimo son iguales. En otras palabras, un plan de producción es óptimo para la empresa cuando la recta de isocostos que pasa por tal punto es tangente a la Isocuanta que pasa por el, tal y como mostramos en el siguiente gráfico:



Resumiendo, las condiciones que debe cumplir un plan óptimo de producción (L*,K*) para minimizar los costos de producir $\bar{Q}$ unidades son las siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{PMg_L(L^*,K^*)}{PMg_K(L^*,K^*)} = \dfrac{w}{r} \\ Q(L^*,K^*) = \bar{Q} \end{cases}$$

Observe entonces que cada vez que una empresa utiliza una determinada cantidad de insumos para su proceso productivo, las cantidades de dichos insumos que adquiere cumplen con dichas condiciones, pues la empresa en su espíritu de maximización de beneficios siempre está minimizando costos.

Derivación de la Función de Costos de Largo Plazo

De acuerdo a lo visto en el ejemplo anterior, para producir 1000 unidades de Q, el plan de producción $\left(L^* = 25.8198, \quad K^* = 12.9099\right)$ es la combinación de insumos que permite producirlo al menor costo. La pregunta ahora es: ¿cuánto es el costo mínimo de producir 1000 unidades? Para responderla simplemente debemos multiplicar dichas cantidades por sus respectivos precios y sumarlos o lo que es lo mismo, evaluar en la función CT las cantidades anteriores:

$$CT = wL + rK$$
$$= 10 * 25.8198 + 20 * 12.9099$$
$$CT(Q = 1000) = 516.397$$

De esta manera hemos hallado el costo total mínimo de producir 1000 unidades, pero ¿a cuánto ascendería el costo total de producir 2000 unidades, ó 3000, 4000, etc?

Una forma de responderlo sería realizar nuevamente todos los cómputos[5], hallar los L y K óptimos que minimizan los costos para producir 2000 unidades por ejemplo y multiplicarlos por sus precios y sumarlos. Si efectuamos todo esto para cada nivel de producción, se puede confeccionar la siguiente tabla:

Q	CT
1000	516,39
2000	730,29
3000	894,42
4000	1032,79
5000	1154,.70

Sin embargo, si bien efectuando todos los cálculos logramos responder la pregunta resulta muy tedioso rehacer todo de nuevo cada vez que cambia el nivel de producción. Para evitar este problema podemos resolver un único problema de minimización general trabajando con un valor paramétrico de Q en vez de una cantidad numérica, como sigue:

$$\min_{(L,K)} CT = 10L + 20K$$
$$s.a: \quad 3LK = Q$$

Para resolver este problema de optimización restringida despejaremos K de la restricción dada por la isocuanta y lo sustituiremos en la expresión de la suma de los costos con lo cual luego se puede proceder a minimizar como una función de una variable común. En efecto, operando como se dijo se tiene:

$$3LK = Q$$
$$K = \frac{Q}{3L}$$

Sustituyendo en CT, resulta:

$$\min_{(L,K)} CT = 10L + 20\left(\frac{Q}{3L}\right)$$

Derivando con respecto a L, igualando a cero y despejando L resulta:

[5] Los cuales quedan a cargo del lector siguiendo el ejemplo tratado en la sección anterior

$$\frac{d[10L + 20(\frac{Q}{3L})]}{dL} = 0$$

$$10 - \frac{20Q}{3L^2} = 0 \Rightarrow L^* = \sqrt{\frac{2Q}{3}}$$

Donde la expresión anterior indica cuanto debe utilizarse de L para producir cualquier nivel deseado de Q. Sustituyendo el valor óptimo de utilización de L en la restricción dada por la isocuanta y despejando resulta:

$$K = \frac{Q}{3L}$$

$$K^* = \frac{Q}{3 * \sqrt{\frac{2Q}{3}}} = \frac{Q}{\sqrt{\frac{9 * 2Q}{3}}} = \frac{Q}{\sqrt{6Q}} = \frac{Q}{\sqrt{6}\sqrt{Q}} = \frac{Q}{\sqrt{6}\ Q^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q^1\ Q^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}} = \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{6}}$$

$$K^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{Q}$$

De esta manera el plan de producción $\left(L^* = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{Q}, \quad K^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{Q} \right)$ es la combinación de insumos que permite producir Q unidades al menor costo. Sustituyendo los valores óptimos en la función de costos

$$CT = wL + rK$$

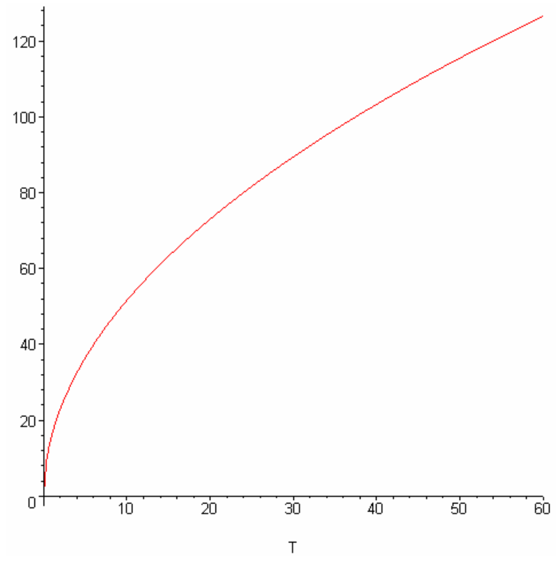
$$= 10\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{Q} + \frac{20}{\sqrt{6}}\sqrt{Q}$$

$$CT(Q) = (10\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{20}{\sqrt{6}})\sqrt{Q}$$

$$CT(Q) = 16,33\sqrt{Q}$$

Donde esta última expresión a la que arribamos es la Función de costos de Largo Plazo de la empresa, pues indica para cada nivel de producción deseado el Costo mínimo al que puede producirse. Así si queremos hallar el costo mínimo de producir 2000, 3000, etc unidades de Q simplemente se debe reemplazar en la fórmula anterior.

Graficando la Función anterior resulta:



Toma de Decisiones relacionadas al Tamaño de Planta Óptimo

Los instrumentos de análisis abordados en las secciones anteriores nos permiten responder dos grandes interrogantes en relación a los tamaños de planta y producción.
Considérese por ejemplo el problema de, dado un determinado nivel de producción que se desea obtener para atender una demanda estimada futura, ***determinar el tamaño de planta*** (es decir la cantidad del insumo K) a instalar de modo tal que permita producir dicho nivel de producción al menor costo posible.
Poniendo el problema en términos mas concretos, continuemos trabajando con la función de Producción anterior, *Q(L,K) = 3LK* y que los precios de los insumos son 10 y 20 para L y K respectivamente. Adicionalmente supongamos que diversos estudios de demanda indican que en el futuro debemos afrontar una demanda de 1000 unidades de producto.
Para dar solución a este interrogante debemos apelar al uso de la fórmula del Stock de Capital en función del nivel de producción que obtuvimos en la sección anterior:

$$K^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{Q}$$

Si recordamos, dicha fórmula[6] indicaba para cada nivel de producción deseado, la cantidad de capital que debíamos utilizar para producirlo al menor costo posible. Sustituyendo por los datos resulta que para un nivel de 1000 unidades el stock óptimo de K es:

$$K^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{100}$$

$$K^* = 12,9099$$

Por lo tanto ese es el tamaño que se debe finar para el nivel de producción de 1000 unidades.

[6] Tener presente que esta fórmula vale para solo para la función de producción utilizada en el ejemplo, es decir *Q=3LK* . Si la función de producción se modifica, se debe obtener la fórmula del K* de la misma manera que se hizo en la sección anterior mediante la resolución del problema de minización.

Considérese ahora el problema inverso de, dado un stock de Capital fijo en el Corto Plazo (es decir un tamaño de planta determinado), ***determinar cual cuál es el nivel de producción*** para el cual dicho tamaño de planta fijo resulta óptimo. Óptimo en el sentido que permite obtener es nivel de producción al menor costo posible en comparación con lo que costaría producir esa cantidad utilizando cualquier otro tamaño de planta posible.
Poniendo el problema en términos mas concretos, continuemos trabajando con la función de Producción anterior, *Q(L,K) = 3LK* y que los precios de los insumos son 10 y 20 para L y K respectivamente. Adicionalmente supongamos que en el Corto Plazo nuestro stock de capital es de 50 unidades. ¿Cuál será el nivel de producción Q para el cuál un tamaño de plata igual a 50 resulte óptimo?
Para dar solución a este nuevo interrogante debemos apelar al uso de la fórmula del Stock de Capital en función del nivel de producción que obtuvimos en la sección anterior:

$$K^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{Q}$$

Despejando Q resulta:

$$K^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{Q}$$
$$Q = 6K^2$$

Esta última, nos dice para cada nivel de capital (tamaño de planta), el nivel de producción para la cual dicho stock resulta óptimo. Sustituyendo por los datos, se tiene:

$$Q = 6*50^2$$
$$Q = 1500$$

Por lo tanto si tenemos una plata con un tamaño igual a 50 unidades de Capital, debemos producir 1500 unidades de Q, pues 1500 unidades es el nivel de producción para el cual nuestra planta tiene la propiedad de ser capaz de producirlo al menor costo posible. Es decir, si tenemos infinitas plantas de todos los tamaños posibles, todas produciendo 1500 unidades, el costo de producir esas unidades en nuestra planta es el menor de todos.
De lo visto anteriormente, uno fácilmente puede deducir que "*Para cada Nivel de Producción existe un y solo un Tamaño de Planta Óptimo*". Y al revés: *"Para cada Tamaño de Planta Fijo en el Corto Plazo existe un nivel de Producción para el cual dicho tamaño de Plata resulta Óptimo"*

Relaciones entre las Curvas de Costos de Corto Plazo y las de Largo Plazo

De todo lo analizado anteriormente estamos en condiciones de establecer diversas propiedades que deben cumplir las Funciones de Costos de Corto y Largo Plazo. Para ello imaginemos que disponemos de todas las curvas de Costos de Corto Plaza, cada una asociada a un stock de capital fijo diferente, y la Curva de Costos de Largo Plazo, la cual es siempre única. Las propiedades que deben verificar este conjuntos de curvas, son los siguientes:

1.- *El Costo de Largo Plazo siempre se encontrarán por debajo de los Costos de Corto Plazo.* Esto es así, pues en el Largo Plazo todos los insumos son variables y por lo tanto podemos ajustar tanto L como K a la hora de minimizar los costos. En el Corto Plazo, sin embargo, el capital no puede variar por lo que solo podemos ajusta el nivel L a la hora minimizar Costos. Así, al tener en el largo plazo mas variables para modificar y alcanzar la minimización de costos, en el corto plazo nunca pueden obtenerse costos menores que en el Largo.

2.- Cada curva de Corto Plazo tiene un único punto de tangencia con la Largo Plazo, por lo que en definitiva puede decirse que cada uno de los puntos de ésta última está constituida por un único punto de cada una de las de Corto.

3.- El punto que comparten cada Costo de Corto con el Costo de Largo, se da justamente en aquel nivel de Q para el cual el stock de capital fijo asociado a cada función de Corto resulta óptimo.

Estas tres propiedades se resumen geométricamente diciendo que la Curva de Costos de Largo Plazo es la ***Envolvente Geométrica*** de las de Corto Plazo.
En efecto si graficamos un conjunto de curvas de Corto, generadas por la ecuación general que vimos[7]:

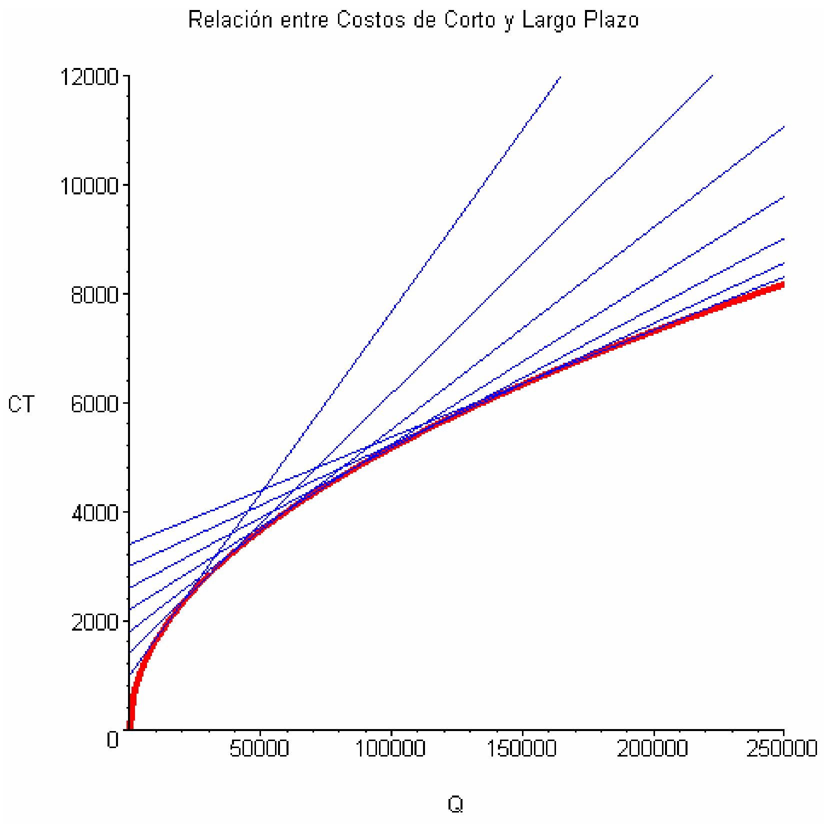
$$CT(Q) = 10\frac{Q}{3K} + 20K$$

Para diversos tamaños de planta (en color azul) y la curva de Costos de Largo (en rojo):

$$CT(Q) = 16,33\sqrt{Q}$$

se obtiene:

[7] Recordar que esa expresión indicaba para cada tamaño de planta, la curva de Costo de Corto Plazo asociada a ese stock fijo de capital dado que la función de producción era *Q(L,K) =3LK*.



Lo cual muestra que la Curva de Largo (color rojo) envuelve por debajo a cada una de las de Corto, cumpliendo así con las tres propiedades.

Obsérvese como el punto de tangencia entre una de Corto y la de Largo viene dado por:

$$Q = 6K^2$$

Pues es ese el nivel de Q para el cual cada tamaño de planta (K) resulta óptimo.