Teoría del Consumidor: un Enfoque Algebraico, Conceptual y Geométrico

Jorge Mauricio Oviedo [1]

Resumen: En este artículo se analiza con máximo detalle la Teoría del Consumidor. Se describen su conformación, sus parámetros y los cambios que se producen en el mismo ante alteraciones en alguno de ellos. Se provee de un triple fundamento en cada resultado alcanzado: Análisis Geométrico, Análisis Algebraico y Análisis Conceptual.

[1] jorviedo@ubp.edu.ar

Restricción Presupuestaria

La restricción presupuestaria describe de alguna manera lo que los consumidores “pueden” consumir dado el conjunto de Precios de cada uno de los bienes y la cantidad de dinero o “Presupuesto” que disponen para gastar en la adquisición de los mismos.

Supongamos que un consumidor representativo solo consume dos bienes “X” e “Y” y sus respectivos precios son Px y Py y que posee además un Ingreso Monetario igual a M. Entonces su restricción presupuestaría viene dada por la siguiente ecuación:

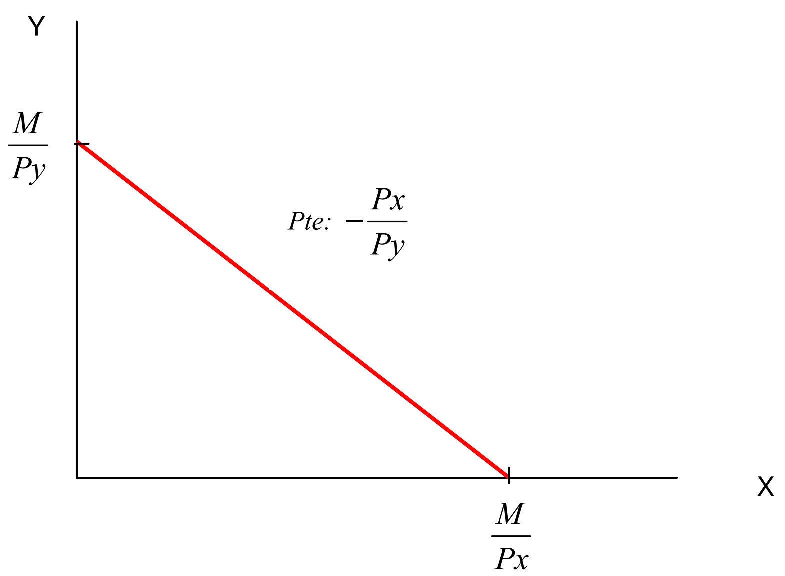
$$P_x X + P_y Y = M$$

Dicha ecuación determina que el Gasto en el Bien X, es decir las cantidades consumidas de X multiplicadas por su precio mas el Gasto en Y (la cantidades consumidas en Y multiplicada por el suyo) no pueden superar la cantidad máxima de ingreso que el consumidor dispone para gastar en el periodo.

Alternativamente podemos obtener la ecuación explícita de la Recta Presupuestaria con solo despejar el valor de Y en términos de X, como sigue:

$$Y = \frac{M}{Py} - \frac{Px}{Py} X$$

Esta última ecuación nos permite representar en términos geométricos la Restricción Presupuestaria de la siguiente manera:



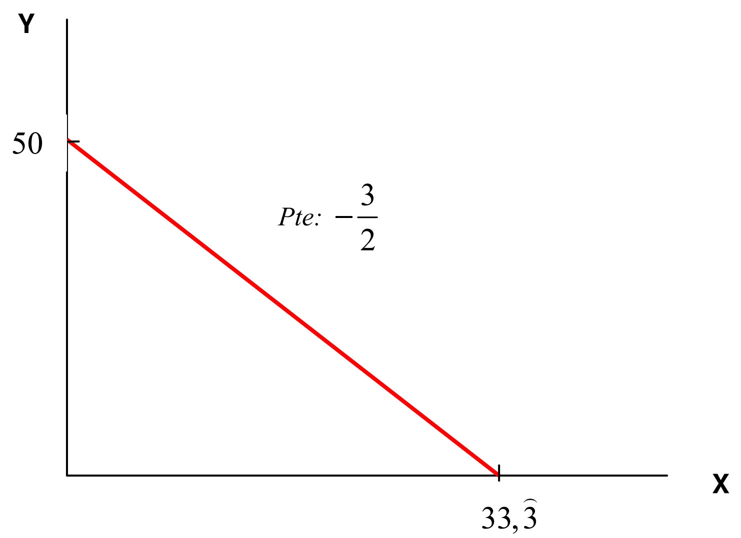
Donde la ordenada al origen, M/Py, se interpreta como la cantidad máxima que se puede comprar de Y si no se consume nada de X y la abcisa al origen, M/Px, representa lo máximo que se puede adquirir del bien X medidos en unidades físicas ambos casos.

De esta manera todos los puntos que se encuentran por debajo de la Línea Roja son representan combinaciones de X e Y que no agotan el Ingreso Total del Consumidor (M) es decir, si el consumidor adquiere alguna de esas cestas no estaría gastando todo su dinero. Por otro lado, las cestas que se encuentras por encima de la restricción Presupuestaría representan cestas de consumo que no pueden ser compradas con el nivel de Ingreso M, es decir son cestas inasequibles para el consumidor dado su nivel de ingreso M.
Un punto importante a destacar es la interpretación económica de la pendiente de la recta anterior. Si uno recuerda la pendiente de la recta es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{Px}{Py} = CO_{x/y} = VOM_{x/y}$$

Es decir cuantas unidades de Y se deben dejar de consumir si se desea incrementar en una unidad el consumo de X, que no es otra cosa mas que el ***Costo de Oportunidad de X en términos del Bien Y*** (COx/y). Ahora bien, ese CO puede interpretase de una manera mas profunda como la ***Valoración Objetiva del Mercado del Bien X en términos del Bien Y*** (VOMx/y), en el sentido de que la expresión de la pendiente $-\frac{Px}{Py}$ indica cuanto vale en el mercado una unidad de X medida en unidades de Y en vez de medirlo en unidades monetarias. Esto significa que cualquier individuo puede adquirir en el mercado una unidad de X entregando dicha cantidad de unidades de Y, y dado que cualquier persona puede llevar a cabo dicho intercambio se dice que ese valoración del mercado es una ***Valoración Objetiva*** pues es independiente de la valoración subjetiva propia que cada agente pueda tener.
Veamos un ejemplo para aclarar más todos éstos términos
Supongamos que se dispone de un ingreso de 100 pesos y que se consumen solo dos bienes X a un precio de \$3 y el bien Y a un precio de \$2. Bajo estos parámetros la restricción presupuestaria en términos algebraicos y geométricos luce así:

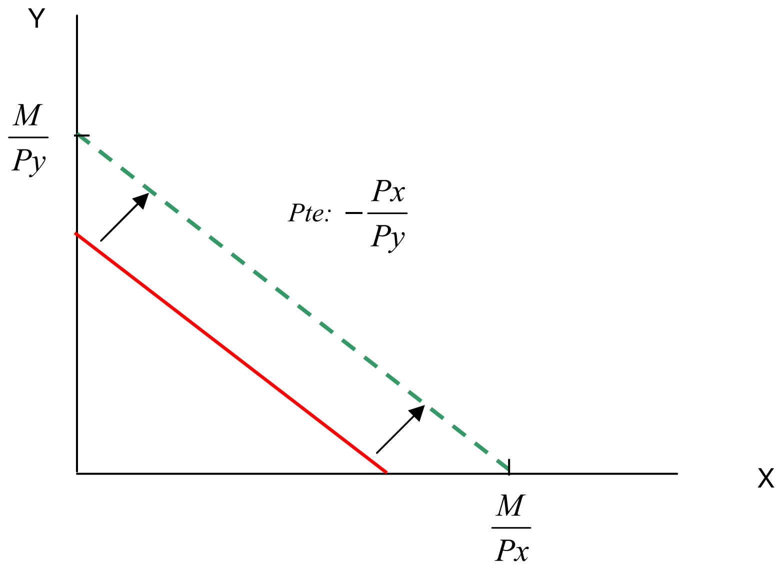
$$Y = 50 - \frac{3}{2}X$$



Por la tanto bajo esos parámetros la ordenada al origen indica en términos conceptuales que se puede adquirir un máximo de 50 unidades del bien Y mientras que la abcisa origen dice que el máximo posible de consumir de X es de 33,3 unidades. Por otro lado la pendiente de la recta presupuestaria indica que el mercado valora al bien X en 1.5 unidades del Bien Y, es decir si uno quiere adquirir una unidad adicional de X debe entregar a cambio 1.5 unidades de Y en el Mercado para poder obtenerlo. 1.5 es la tasa a la que el mercado intercambia un bien por otro. Veamos a continuación algunos análisis de Estática Comparativa ante la modificación de algunos de los parámetros del Modelo.

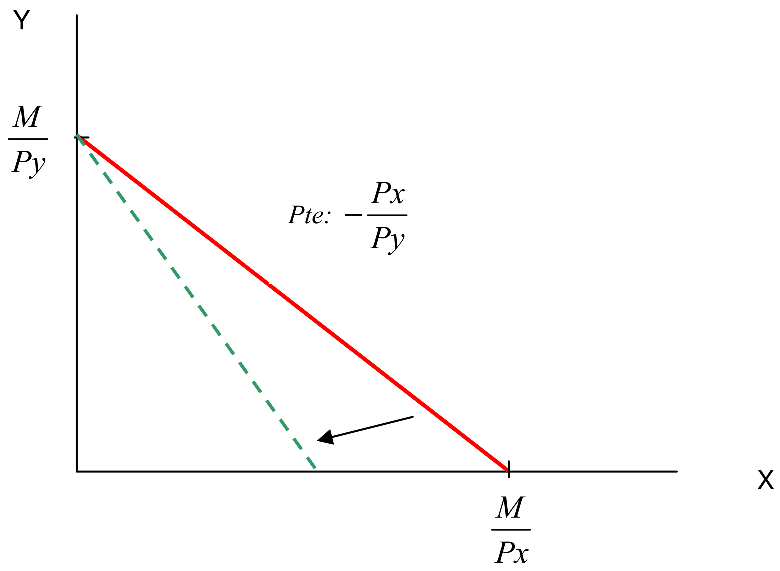
Efectos de un incremento en el Ingreso

Repasando las estructuras analíticas de las expresiones de abcisas y ordenadas al origen se verifican que ambas aumentan ante un incremento de M por lo que geométricamente la Restricción Presupuestaria se traslada paralelamente hacia la derecha. Obsérvese además que al no haberse modificado los precios la pendiente no se ha cambiado. Conceptualmente el desplazamiento paralelo indica que ahora se pueden consumir una mayor cantidad de ambos bienes que antes no era posible y en el mercado las relaciones de intercambio no se han modificado, La Valoración Objetiva del Mercado se mantiene constante en este caso.



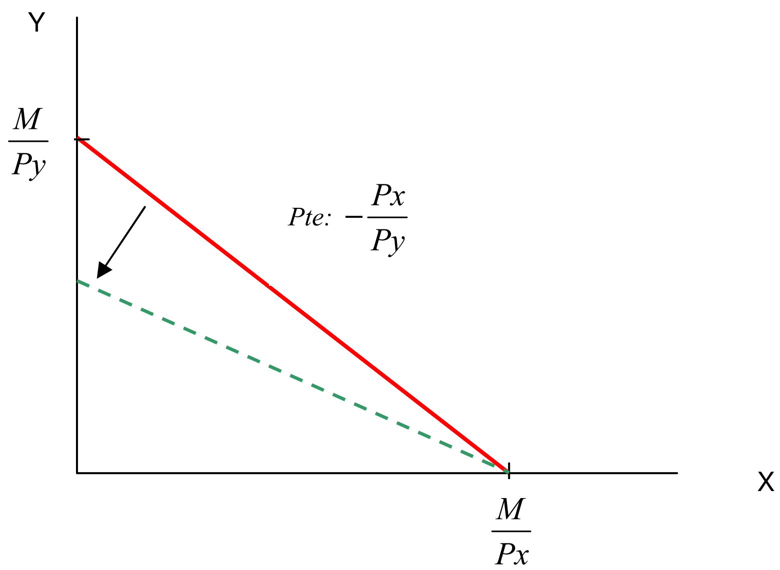
Efectos de un incremento en el Precio de X

Repasando las estructuras analíticas de las expresiones de abscisas y ordenadas al origen se verifican que la ordenada al origen permanece sin cambios mientras que la abcisa se reduce ante un incremento de Px por lo que geométricamente la Restricción Presupuestaria rota hacia adentro en el sentido de las agujas del reloj. Obsérvese además que al haberse modificado el Precio de X la pendiente ha aumentado en valor absoluto. Conceptualmente la rotación de la Recta indica que ahora se pueden consumir una menor cantidad de bienes que antes pero la cantidad máxima posible de adquirir de Y no se ha modificado pues su precio no cambió. Por otro lado al encarecerse el bien X ahora para adquirir una unidad adicional del mismo se deben entregar una cantidad mayor de Y pues a Valoración Objetiva del Mercado aumentó.



Efectos de un incremento en el Precio de Y

Repasando las estructuras analíticas de las expresiones de abscisas y ordenadas al origen se verifican que la abcisa al origen permanece sin cambios mientras que la ordenada se reduce ante un incremento de Px por lo que geométricamente la Restricción Presupuestaria rota hacia adentro en el sentido contrario de las agujas del reloj. Obsérvese además que al haberse modificado el Precio de Y la pendiente ha disminuido en valor absoluto. Conceptualmente la rotación de la Recta indica que ahora se pueden consumir una menor cantidad de bienes que antes pero la cantidad máxima posible de adquirir de X no se ha modificado pues su precio no cambió. Por otro lado al encarecerse el bien Y ahora para adquirir una unidad adicional de X se deben entregar una cantidad menor de Y pues a Valoración Objetiva del Mercado ha disminuido.



Efecto de un incremento proporcional igual en M, Px y Py

Su pongamos que se produjese un incremento simultáneo en un cierto porcentaje igual en precios e Ingreso, es decir aumentan el precio de X, el de Y junto al Ingreso todos en un mismo porcentaje. El efecto sobre la restricción presupuestaria es nulo pues al haber aumentado todos los parámetros en la misma proporción ninguno de los elementos de la Recta se modifican, por lo que la gráfica queda inalterada.

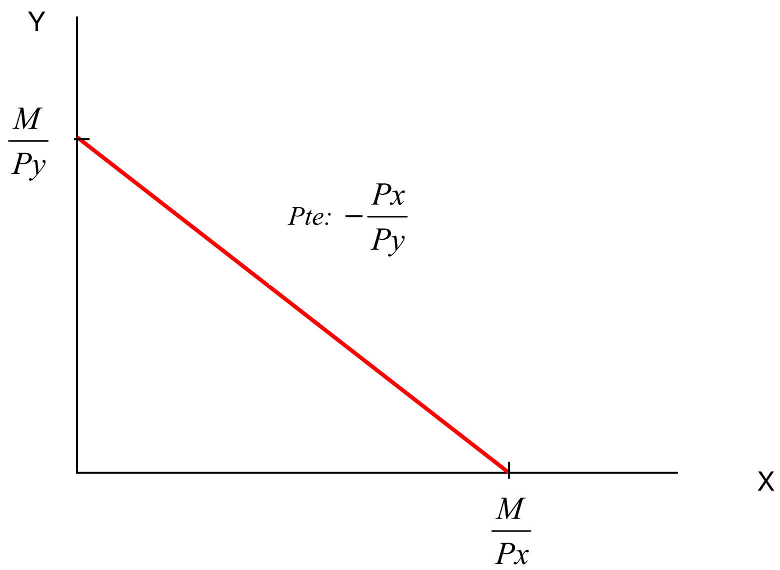
Algebraicamente puede verse así:

Si se produce un incremento proporcional en todos los parámetros de t % la nueva recta presupuestaria quedará así:

$$Y = \frac{M(1+t)}{Py(1+t)} - \frac{Px(1+t)}{Py(1+t)} X$$

$$Y = \frac{M}{Py} - \frac{Px}{Py} X$$

Lo cual verifica que no se ha alterado.



Función de Utilidad

La función de Utilidad algebraicamente es una función de dos variables que indica para cada cantidad consumida de dos bienes, un número, un índice de satisfacción, en el sentido que si este número es más grande que otro el consumidor disfruta de una satisfacción mayor. De alguna manera la Función de Utilidad describe lo que el consumidor "desea" consumir.

Algebraicamente se lo representa así:

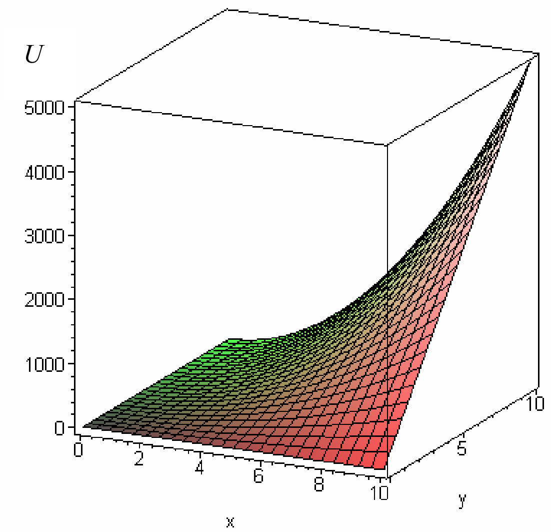
$$U = U(X,Y)$$

Donde U(x,y) representa a una función genérica de dos variables.

Supongamos por ejemplo que un consumidor representativo posee preferencias que pueden ser representadas por la siguiente función de Utilidad:

$$U(x,y) = 5x^2 y$$

Las mismas pueden representarse gráficamente por la siguiente figura que muestra en una gráfica en 3D la función de Utilidad:



Obsérvese que el dominio de la función de utilidad lo constituye el plano (x,y), es decir el espacio de bienes, y sobre ese dominio a cada punto se le asocia un punto sobre el eje vertical cuya altura representa el nivel de utilidad. De esta manera si tuviésemos que comparar dos cestas de bienes, para analizar cual reporta mas utilidad al individuo solo deberíamos identificar en el dominio dichas cestas y ver cual de ellas tiene asociado un punto sobre el eje vertical a mayor altura. Analicemos lo anterior con un ejemplo.

Supongamos además que posee dos cestas de Consumo:

A: (1,7)

B: (2,3)

Donde el primer componente de cada par ordenado indica las cantidades a consumir del bien X y la segunda componente las cantidades de Y. ¿Cuál de estas cestas le reportará mayor satisfacción al consumidor? Para responder dicha pregunta procedamos a evaluar la U en cada cesta, como sigue:

$$U(1,7) = 35$$
$$U(2,3) = 60$$

Esto indica que la cesta de Consumo B le reporta al consumidor mayor satisfacción que la cesta A por lo cual preferirá B antes que A.

Utilidad Marginal

Otro elemento muy importante que se desprende de la función de Utilidad es la Utilidad Marginal. Esta última indica cuanto mejora la satisfacción del consumidor como consecuencia de aumentar en una unidad el consumo de un bien y mantener constante el consumo del otro. Algebraicamente la Utilidad Marginal del bien X por ejemplo, no es otra cosa más que la derivada parcial de U con respecto a X, así:

$$UMg_x(X,Y) = \frac{\partial U(X,Y)}{\partial X}$$

Y de manera similar para la Utilidad Marginal de Y

$$UMg_Y(X,Y) = \frac{\partial U(X,Y)}{\partial Y}$$

Obsérvese como ambas Utilidades Marginales son funciones de dos variables, implicando ello que su valor depende de la cesta actual de bienes que el agente está consumiendo.
Si continuamos con el ejemplo anterior podríamos entonces computar las funciones de Utilidades marginal de X como sigue:

$$UMg_x(X,Y) = \frac{\partial U(X,Y)}{\partial X} = 10xy$$

A su vez podríamos computar el valor de la UMgx en la cesta de consumo A, asi:

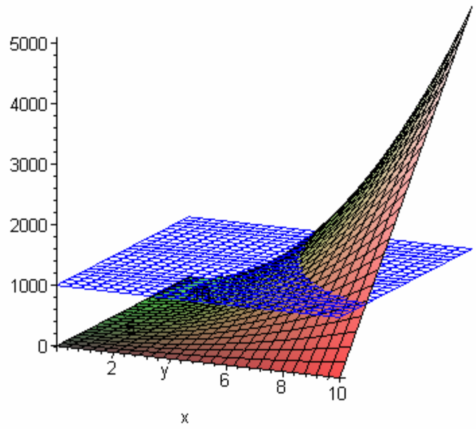
$$UMg_x(1,7) = 70$$

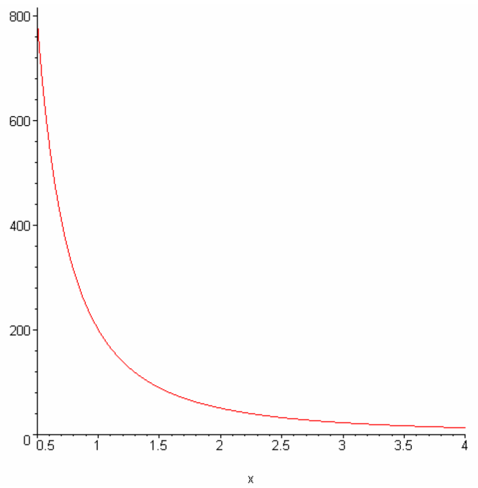
Ese valor de 70 indica que si el agente esta consumiendo 1 unidad de X y 7 unidades del bien Y, entonces si quisiera aumentar su consumo de X en una unidad, su satisfacción total, es decir su Utilidad, se incrementaría en 70 unidades.
Algo similar podría calcularse para el caso de la UMgy.

Curva de Indiferencia

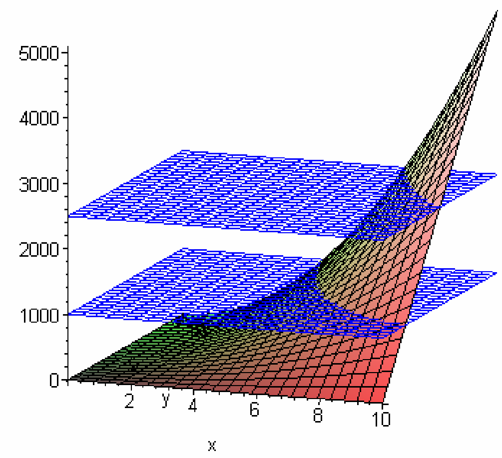
Uno de los elementos más importantes de la Teoría del Consumidor lo constituyen un instrumento de análisis denominado Curvas de Indiferencias. Las mismas indican conceptualmente un conjunto de cestas (X,Y) tales que reportan al individuo el mismo grado de satisfacción, en otras palabras el consumidor se muestra indiferente entre consumir cualquiera de ellas pues todas le otorgan el mismo nivel de utilidad placer. En términos algebraicos y geométricos las Curvas de Indiferencias no son otra cosa mas que las Curvas de Nivel de una Función de dos Variables, es decir el conjunto de puntos (x,y) tales que conceden a la función el mismo valor, la misma altura en la gráfica.
Para derivar geométricamente una curva de indiferencias lo que debemos hacer es cortar la gráfica de U con un plano horizontal ubicado a una altura constante tal como se muestra en color azul en la gráfica de la izquierda ubicada mas abajo. Luego la sección de la gráfica en 3D que es intersectada por el plano azul debe proyectarse contra el plano del piso donde emerge la gráfica de U, es decir el plano del dominio (x,y). Si identificamos cada uno de esos puntos y los representamos en una gráfica de dos dimensiones podemos trazar una curva como la que se muestra a la derecha del gráfico a continuación. Dicha curva es la Curva de Indiferencia asociada a un nivel de Utilidad de 1000 unidades de satisfacción, pues cada uno de esos

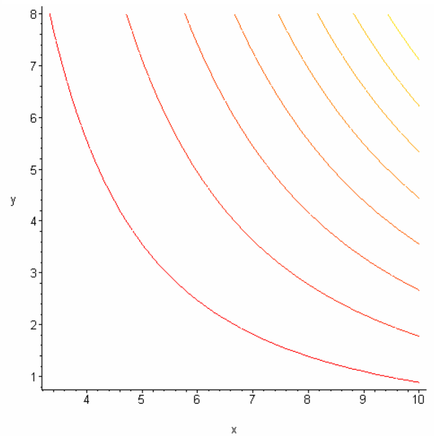
puntos tiene la propiedad que al ser evaluados en la función de Utilidad otorgan a U un valor constante e igual a 1000.





De manera similar podemos hallar las curvas de indiferencias asociadas a distintos niveles de utilidad constante. Como se muestra en la gráfica de mas abajo, si procedemos a cortar la grafica de U con sucesivos planos ubicados a distintas alturas podremos trazar distintas curvas de indiferencia cada una asociada a distintos niveles de utilidad. Se puede observar también que a medida que cortamos la gráfica con planos a una altura cada vez mayor, y por lo tanto a un nivel de utilidad o de satisfacción mayor, las curvas de indiferencia asociadas a niveles de utilidad mayores se encuentran representadas a la derecha cada vez mas alejada del origen. Esto implica que un consumidor es indiferente entre consumir cualquier canasta de bienes que se encuentre sobre una misma Curva de Indiferencias pero las canastas ubicadas en curvas de indiferencias mas alejadas del origen reportan mas utilidad que las mas cercanas, y por lo tanto son preferidas estas últimas a las primeras





Restaría entonces determinar la expresión algebraica que permite representar a las curvas de indiferencias. Continuando con el ejemplo anterior si deseamos computar la expresión algebraica de la Curva de Indiferencia asociada a un nivel de Utilidad de 1000 unidades de satisfacción debemos igualar la expresión de la función de utilidad al nivel de Utilidad deseado, 1000 en este caso:

$$1000 = 5x^2y$$

Así, todos los pares (x,y) que cumplan con dicha condición garantizan un reporte de utilidad de 1000 unidades a este consumidor.

Luego de ahí podemos despejar y con lo que resulta:

$$y = \frac{200}{x^2}$$

Que es la expresión analítica de la función que describe la curva de la indiferencia asociada a un nivel de Utilidad de 1000 unidades para las preferencias de este consumidor hipotético.

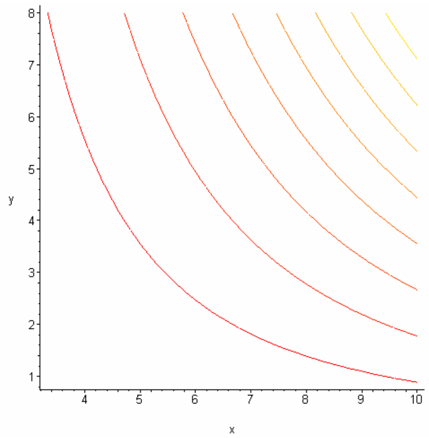
De manera más general podemos encontrar el conjunto de todas las Curvas de indiferencias asociadas a un nivel de Utilidad paramétrico U, como sigue:

$$\bar{U} = 5x^2y$$

$$y = \frac{\bar{U}}{5x^2}$$

Luego ésa es la expresión para generar todas las Curvas de Indiferencias posibles, solo se debe asignar a U el valor de utilidad deseado y la fórmula anterior automáticamente entregará la función algebraica que describe exactamente la Curva de Indiferencia asociada al nivel de Utilidad deseado dado una función de Utilidad. El conjunto de todas las Curvas de Indiferencias se denomina ***Mapa de Indiferencia*** y la expresión algebraica que la describe es la anterior.

Obsérvese además como valores cada vez mas grades de U hacen que la gráfica de las Curvas de Indiferencias se encuentren cada vez mas alejadas del origen como en el siguiente gráfico:



Otra situación importante de analizar sería la manera de hallar la curva de indiferencia que pasa por una determinada canasta de bienes. Así por ejemplo, podríamos estar interesado en conocer todas las canastas de consumo que reportan al individuo un nivel de Utilidad idéntico al que proporciona la Canasta de Consumo A = (1,7) como vimos en el ejemplo anterior. Como recordaremos, la canasta A proveía al individuo de un nivel de utilidad igual a 35 unidades, por lo que el problema se transforma en hallar el conjunto de canastas de bienes (X,Y) que reportan al individuo un nivel de Utilidad igual a 35.
En efecto si reemplazamos en la fórmula del Mapa de Indiferencias U = 35 resulta:

$$y = \frac{\bar{U}}{5x^2}$$
$$y = \frac{7}{x^2}$$

Alternativamente, efectuando todos los cálculos anteriores, es decir encontrando las canasta que reportan un nivel de Utilidad idéntico al de la Canasta A, resulta:

$$U(1,7) = 5x^2 y$$
$$35 = 5x^2 y$$
$$y = \frac{35}{5x^2}$$
$$y = \frac{7}{x^2}$$

Luego todas las canastas en donde la cantidad del bien Y se relacione como lo indica la expresión anterior con X, cumplirán con la condición de reportar un nivel de Utilidad idéntico al de la canasta A.

Tasa Marginal de Sustitución

Íntimamente vinculado al concepto de Curva de Indiferencia surge el de ***Tasa Marginal de Sustitución*** (TMS). Este no es otra cosa más que la pendiente de la Curva de Indeferencia asociado a un nivel dado de Utilidad. En Términos conceptuales, dicha pendiente y por ende la TMS, se puede interpretar como la cantidad de unidades del bien Y que se debe dejar de consumir para incrementar en una unidad el consumo de X y seguir disfrutando del mismo nivel de satisfacción anterior.

En términos algebraicos la TMgS no es otra cosa más que la derivada de la Curva de Indiferencia con respecto a X y evaluada en la cesta de consumo en cuestión.

Alternativamente la TMS en un punto puede computarse como se explica a continuación. Si calculamos la diferencial total de la función, es decir el incremento en la Utilidad del Consumidor como consecuencia de modificar el consumo de x y de y, resulta:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Pero como en una Curva de Indiferencias los cambios en X y en Y son tales que el consumidor no modifica su nivel de Utilidad, el Diferencial Total de la Utilidad debe ser cero:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Reagrupando términos resulta:

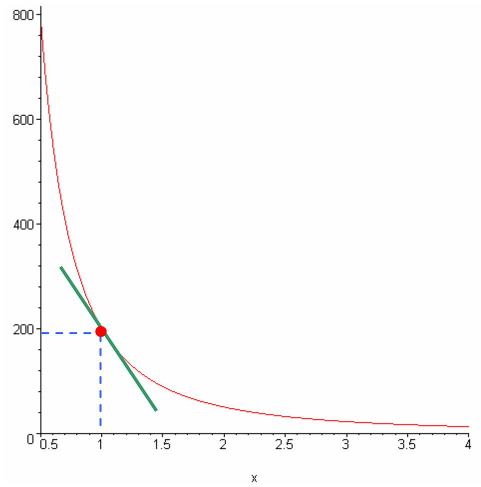
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)} = -\frac{UMgx(x,y)}{UMgy(x,y)}$$

Es decir, si queremos computar la TMS en un punto dado, lo que debemos hacer es computar previamente las Utilidades Marginales de X y de Y, valuarlas en la canasta en la cual deseamos calcular la TMS y cambiarle el signo.

Veamos un ejemplo, continuando con la función de Utilidad del Ejemplo anterior, supongamos que deseamos calcular la TMS en la cesta de consumo (1,200), aplicando las fórmulas resulta:

$$TMS(x,y) = -\frac{UMgx(x,y)}{UMgy(x,y)} = -\frac{10xy}{5x^2} = -\frac{2y}{x} =$$

$$TMS(1,200) = -\frac{2*200}{1} = -400$$



Esto indica que si el consumidor actualmente está consumiendo la cesta (1,200) y desea incrementar en una unidad adicional el consumo del bien X deberá dejar de consumir 400 unidades de Y para seguir disfrutando del mismo bienestar que gozaba cuando consumía la cesta inicial (1,200).

Obsérvese como la TMS es una especie de COx/y subjetivo y propio de cada consumidor que depende de las preferencias (función de Utilidad) y la cesta actual que el individuo esté consumiendo. En otras palabras, la TMS es lo que denominamos la ***Valoración Subjetiva del Consumidor*** en el sentido de que para ese consumidor, dadas sus preferencias (de ahí lo subjetivo) y su nivel actual de consumo valora una unidad de X en 400 unidades de Y y a esa tasa está dispuesto a intercambiar un bien por otro, pues es ese el valor que para el consumidor el bien X tiene.

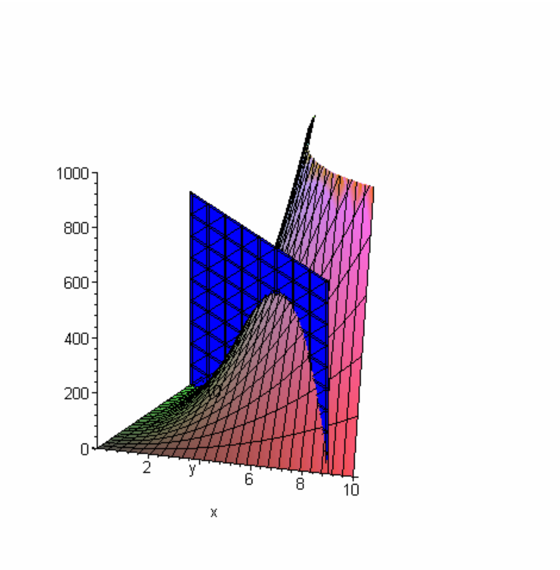
El óptimo del Consumidor

Teniendo entonces lo que el consumidor "***desea consumir***" representado en la función de Utilidad y lo que verdaderamente "***puede consumir***" en la restricción presupuestaria, estamos entonces en condiciones de analizar cuanto consumirá este agente representativo. El individuo elegirá aquellas cantidades de X e Y cuyo gasto no supere el monto M indicado por su restricción de presupuesto y que maximicen el valor de U. Algebraicamente lo que el consumidor resuelve inconcientemente a la hora de decidir cuanto va consumir es el siguiente problema de optimización restringida:

$$\max_{(X,Y)} U = U(X,Y)$$
$$sa: \quad Px\,X + Py\,Y = M$$

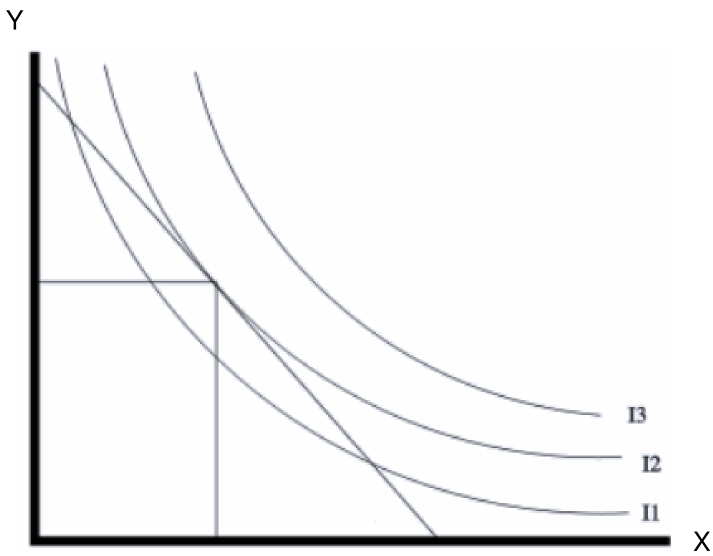
Es decir buscará las cantidades de X e Y que hacen máximo el Valor de U sujeto a la restricción presupuestaria.

En términos geométricos el consumidor debe elegir aquellas cestas que posadas sobre la línea de presupuesto confieran el valor mas alto de utilidad. Si sobre el plano (X,Y) donde se encuentra graficada la restricción de presupuesto elevamos un plano vertical en color azul que está apoyado justo sobre la restricción presupuestaria, y sobre ese mismo plano elevamos la grafica de la función de utilidad, de modo tal que en cada punto del plano (x,y) del dominio se pueda visualizar el nivel de utilidad asociado, resulta la siguiente gráfica:



De esta manera, el problema de consumidor consiste en elegir aquellos punto que posados sobre la restricción de presupuestos, es decir el plano azul, den a la función de utilidad el valor mas alto.

Desde un perspectiva en dos dimensiones el problema puede interpretarse como en hallar el punto de la restricción presupuestaria por el que pasa la Curva de indiferencias mas alejada posible del origen, pues como lo recordarán, mientras mas alejadas estén mayor es el nivel de utilidad asociado. Así:



Para resolver este problema de optimización restringida despejaremos Y de la restricción presupuestaria y lo sustituiremos en la expresión de U(X,Y), con lo cual luego se puede proceder a maximizar como una función de una variable común. En efecto, operando como se dijo se tiene:

$$P_x X + P_y Y = M$$

$$Y = \frac{M}{Py} - \frac{Px}{Py} X$$

Sustituyendo en U, resulta:

$$U = U(X, \frac{M}{Py} - \frac{Px}{Py} X)$$

Con lo cual hemos convertido un problema de optimización restringida en un problema de optimización sin restricciones.

$$\max_{(X)} U = U(X, \frac{M}{Py} - \frac{Px}{Py} X)$$

Derivando con respecto a X y utilizando la regla de la cadena para derivar funciones compuestas se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = Ux - Uy \frac{Px}{Py} = 0 \Rightarrow \frac{Ux(X,Y)}{Uy(X,Y)} = \frac{Px}{Py} \Rightarrow TMS(x,y) = \frac{Px}{Py}$$

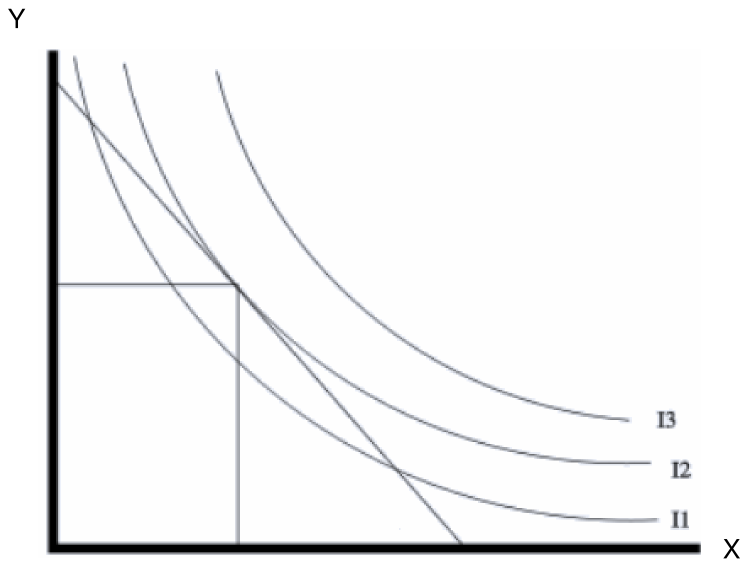
Esta última expresión puede indica que el consumidor está maximizando su satisfacción cuando las cantidades consumidas son tales que la valoración subjetiva del individuo coincide con la valoración objetiva del mercado. En otras palabras, si la valoración del individuo del bien x en términos del bien y es menor que la del mercado, para el individuo el bien X costará mas caro en el mercado de lo que para el vale en relación a la satisfacción que éste le genera y decidirá reducir su consumo de X. Al revés, si la valoración sujetiva del individuo es mayor que la del mercado, para este consumidor el bien X estará mas barato en el mercado de lo que para el cuesta por lo que tenderá a incrementar su consumo. Sólo cuando ambas valoraciones coincidan el agente no tendrá incentivos a reducir ni a aumentar el consumo de X y por la tanto se encontrará en su valor óptimo, pues no existe ningún ajuste en su consumo que le reporte una satisfacción mayor.

Alternativamente, dicha condición de optimalidad puede reescribirse así:

$$\frac{Ux(X,Y)}{Px} = \frac{Uy(X,Y)}{Py}$$

Lo cual indica que un consumidor está maximizando su utilidad cuando la utilidades marginales del último peso gastado en cada uno de los bienes se igualan. Si esta condición no se cumple, es posible reasignar el gasto del presupuesto total (consumiendo mas de uno y menos de otro) de modo tal que su satisfacción sea mayor.

Desde el punto de vista geométrico, si interpretamos las condiciones de optimalidad que debe cumplir la cesta óptima vemos que la TMS es la pendiente de la Curva de indiferencia y Px/Py es la pendiente de la recta de presupuesto, por lo que en el óptimo son iguales. En otras palabras, una cesta es optima cuando la curva de indiferencia que pasa por tal punto es tangente a la restricción presupuestaría, tal y como mostramos en el siguiente gráfico:



Resumiendo, las condiciones que debe cumplir una cesta de consumo (X,Y) para maximizar la satisfacción de un individuos son las siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{Ux(X,Y)}{Uy(X,Y)} = \dfrac{Px}{Py} \\ Px\,X + Py\,Y = M \end{cases}$$

Observe entonces que cada vez que un consumidor compra una determinada cantidad de bienes, las cantidades de dichos bienes que adquiere cumplen con dichas condiciónes, pues el consumidor compró lo que le da mas placer dentro de sus posibilidades. Note además que el consumidor de manera inconciente hizo todos esos cálculos en su mente, sólo que no se dio cuenta.

Veamos todo lo anterior con un ejemplo. Continuando con la función de Utilidad anterior y suponiendo que los precios son de 2 y 3 para X e Y respectivamente y el Ingreso es de 100, se tiene el siguiente problema:

$$\max_{(X,Y)} U = 5x^2 y$$
$$sa: \; 2X + 3Y = 100$$

Despejando y de la restricción y sustituyendo en la función de utilidad resulta:

$$\max_{(X,Y)} U = 5x^2 (\frac{100}{3} - \frac{2}{3} x)$$

Derivando con respecto a x, igualando a cero y despejando x resulta:

$$\frac{d[5x^2(\frac{100}{3} - \frac{2}{3}x)]}{dx} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{100}{3}$$

Sustituyendo el valor óptimo de consumo de x en la restricción presupuestaria y despejando resulta:

$$y^* = \frac{100}{9}$$

De esta manera la cesta de consumo $\left(x^* = \frac{100}{3}, \quad y^* = \frac{100}{9}\right)$ es la cesta de consumo que maximiza la utilidad del consumidor dado su Ingreso y los precios de X y de Y.

Demanda del Consumidor

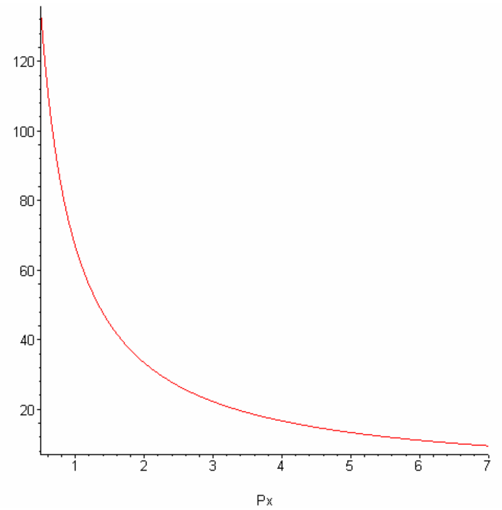
Así para encontrar las cantidades que maximizan la satisfacción del consumidor se debe resolver el problema de optimización visto anteriormente en donde los precios de los bienes, Px y Py son datos numéricos específicos al igual que M, es un valor numérico que indica el Ingreso del Consumidor y U tendrá un especificación funcional particular.

Ahora podríamos resolver nuevamente este problema y ver que sucede por ejemplo con las cantidades que maximizan la satisfacción del consumidor a medida que el precio de X aumenta sucesivamente y armar una tabla en donde se indique el Precio de X en una columna y en la otra columna el valor de X que maximiza la satisfacción del agente a cada nivel de precios.

En el caso del ejemplo anterior si se resuelve el problema anterior para precios de X iguales a 1, 2, 3, 4, 5 manteniendo el precio de Y fijo en 3 y el Ingreso constante en 100, es decir se resuelven 5 problemas de optimización similares al anterior se arribarían a los siguientes resultados:

Px	**X***
1	66,7
2	33,3
3	22,2
4	16,7
5	13,3

En donde en la tabla anterior se muestran las diversas cantidades del bien X que maximizan la utilidad del Consumidor a medida que se van modificando el precio del bien X y permaneciendo el precio del bien Y constante al igual que su Ingreso. Si representamos gráficamente cada uno de esos puntos colocando el precio en las ordenadas y las cantidades óptimas en las abscisas resulta:



Así, al graficar esa tabla nos encontramos con que hemos derivado la Función de Demanda. Ésta no es otra cosa más que las cantidades que el consumidor desea adquirir del bien X a cada nivel de precios de X permaneciendo constantes los precios de otros bienes y su nivel de Ingresos. Nótese como ahora la demanda de X la pudimos derivar en base a las preferencias dadas por la Función de Utilidad y su restricción presupuestaria y entendemos ahora porque el consumidor "demanda" (en el sentido que desea adquirir) esa cantidad y no otra pues es ésa la cantidad de X que maximizan su satisfacción. En otras palabras, a diferencia de Economía I en donde simplemente partíamos de una función de demanda dada sin explicar de donde provenía ni porque era así, ahora la podemos derivarla de la conducta maximizadora de satisfacción por parte del consumidor y entender mas intrínsicamente de donde proviene la misma. Entendemos ahora más profundamente el significado de "***Cambio en la cantidad demandada***" es decir el desplazamiento a lo largo o sobre la curva de demanda del agente como la respuesta óptima del consumidor ante un cambio de precios. El consumidor se desplaza a lo largo de la curva de demanda en dicha dirección y en esa magnitud pues hacerlo de ese modo es lo que maximiza su bienestar.

Ahora bien, continuando con el ejemplo de recién, podemos dar un paso mas, y preguntarnos como podríamos representar geométricamente la función de demanda sin construir una tabla de puntos y graficarlos pues, una gráfica de puntos es una manera muy imprecisa de graficar una función. Una forma de hacerlo es obtener la expresión analítica exacta de dicha función de demanda que representamos recién de la siguiente forma.

En el problema de optimización que resolvimos recién, en vez de trabajar con un valor numérico para el precio de X, simplemente trabajaremos ahora con un valor paramétrico genérico igual a Px. Efectuando los cálculos resulta:

$$\max_{(X,Y)} U = 5x^2 y$$
$$sa: \quad P_x X + 3Y = 100$$

Despejando y de la restricción y sustituyendo en la función de utilidad resulta:

$$\max_{(X,Y)} U = 5x^2(\frac{100}{3} - \frac{Px}{3}x)$$

Derivando con respecto a x, igualando a cero y despejando x resulta:

$$\frac{d[5x^2(\frac{100}{3} - \frac{Px}{3}x)]}{dx} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{200}{3Px}$$

Así, esta última expresión es la función exacta que representamos en la gráfica anterior por lo tanto ahora tenemos una fórmula precisa para determinar cuanto demandará el consumidor a cada nivel de precios. Observe el lector también, como evaluando en la expresión anterior cada uno de los precios de la tabla obtenemos las cantidades óptimas de la segunda columna. Así, además de haber obtenido la expresión exacta de la función de demanda, contamos con una fórmula que nos indica el óptimo del consumidor para cada nivel de precios sin necesidad de resolver el problema de optimización de párrafos mas arriba cada vez que necesitamos saber cual es la cesta de consumo que maximiza el placer del consumidor.

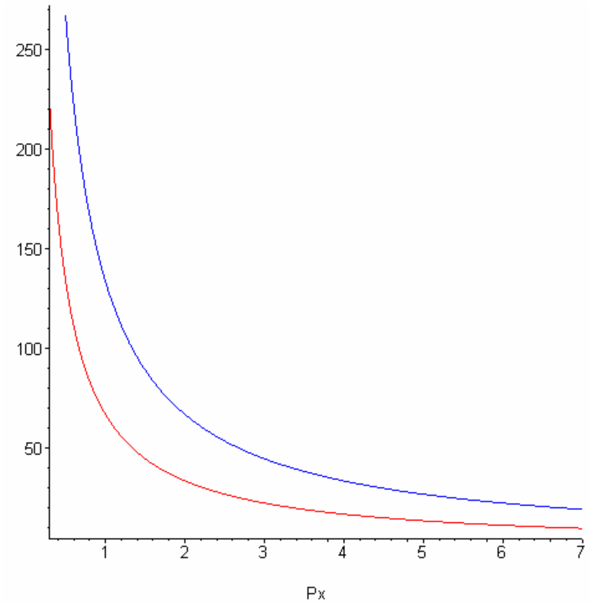
Cambios en la Demanda

Si uno se pregunta que sucedería con la demanda del bien X si se produjese un aumento del Ingreso, uno en Economía I respondía diciendo que la demanda se desplazaba a la derecha o la izquierda dependiendo de si el bien era normal o superior, pero no entendía porque esto era así y además no sabía exactamente en que magnitud específica ocurría dicho desplazamiento. Ahora, al contar con la conducta maximizadota de utilidad sujeto a una restricción presupuestaria podemos entender en detalle lo que ocurre con la demanda del Bien X. Para ello simplemente debemos resolver sucesivos problemas de optimización para un conjunto de precios de X y construir una tabla como se explicó anteriormente pero con la diferencia que ahora modificaremos uno de esos parámetros que se mantuvieron constantes, en este caso el Ingreso del Consumidor.

Continuando con el ejemplo anterior, si se resuelve el problema de maximización de Utilidad sujeto a la restricción de presupuesto que resolvimos anteriormente para precios de X iguales a 1, 2, 3, 4, 5 manteniendo el precio de Y fijo en 3 pero modificando ahora el ingreso a 200 se arribarían a los siguientes resultados:

Px	**X***
1	133,3
2	66,6
3	44,4
4	33,3
5	26,6

En donde en la tabla anterior se muestran las diversas cantidades del bien X que maximizan la utilidad del Consumidor a medida que se van modificando el precio del bien X y permaneciendo el precio del bien Y constante pero con un ingreso ahora igual a 200. Si representamos gráficamente cada uno de esos puntos colocando el precio en las ordenadas y las cantidades óptimas en las abscisas (en color azul) y la comparamos con la gráfica anterior (roja) resulta:



De esta manera observamos que al modificar el Ingreso, el consumidor desea consumir más unidades de X a cada nivel de precio en comparación a la situación anterior. En términos geométricos vemos que la gráfica se ha desplazado hacia la derecha indicando que ahora el consumidor desea consumir más.

Ahora uno se podría preguntar como se modificaría la demanda si el ingreso fuese de 300, 500 o de 50. Para responder esa pregunta, podríamos resolver todo como lo hicimos anteriormente o mejor aún, podríamos evitarnos resolver todos esos problemas de optimización resolviendo sólo uno de manera genérica como recién:

Efectuando los cálculos resulta:

$$\max_{(X,Y)} U = 5x^2 y$$

$$sa: \quad P_x X + 3Y = 200$$

Despejando y de la restricción y sustituyendo en la función de utilidad resulta:

$$\max_{(X,Y)} U = 5x^2 \left(\frac{200}{3} - \frac{Px}{3} x\right)$$

Derivando con respecto a x, igualando a cero y despejando x resulta:

$$\frac{d[5x^2(\frac{200}{3} - \frac{Px}{3}x)]}{dx} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{400}{3Px}$$

Así, esta última expresión es la función exacta que representamos en la gráfica anterior en color azul por lo tanto ahora tenemos una fórmula precisa para determinar cuanto demandará el consumidor a cada nivel de precios cuando tiene un ingreso de 200.

Por último podríamos resolver el problema mas general en donde en vez de trabaja con un nivel de ingreso numérico, lo hacemos con un nivel de ingreso paramétrico igual a M. Así, el problema resulta:

$$\max_{(X,Y)} U = 5x^2 y$$
$$sa: \;\; P_x X + 3Y = M$$

Despejando y de la restricción y sustituyendo en la función de utilidad resulta:

$$\max_{(X,Y)} U = 5x^2 (\frac{M}{3} - \frac{Px}{3} x)$$

Derivando con respecto a x, igualando a cero y despejando x resulta:

$$\frac{d[5x^2(\frac{M}{3} - \frac{Px}{3} x)]}{dx} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{2M}{3Px}$$

Ésta última es la expresión general de la demanda que depende tanto del precio del bien X como del ingreso e indica la manera precisa y exacta en que la demanda se desplaza ante cualquier modificación en el ingreso.

Así, al modificar dicho parámetro, las cantidades de X que maximizan la Utilidad a cada nivel de precios se modifican desplazando la curva de demanda en relación al caso anterior. De esta manera las características intrínsecas propias del consumidor referentes a sus preferencias por los bienes, las cuales se hayan plasmadas en su función de Utilidad, proveen toda la información necesaria para entender como el consumidor modifica sus decisiones óptimas de consumo ante una modificación del Ingreso.

Algo similar podemos realizar con modificaciones en el precio del otro bien y observar como el agente responde modificando sus decisiones de consumo y llegar a arribar una expresión de función de demanda que dependa tanto del precio de X como del Ingreso como del precio del bien Y[2].

De esta manera, teniendo información sobre las preferencias del agente, estamos en concisiones de entender como el consumidor modificará sus decisiones de consumo ante cambios en algunos de los parámetros. Así, entendiendo como el consumidor lleva a cabo su proceso de elección de sus cestas de consumo, estamos en condiciones de efectuar

[2] Si el lector realiza los cálculos comprobará que dada las características particulares de la función que tratamos en el ejemplo, los cambios en Py no afectaran las cantidades consumidas de X por lo que las preferencias del ejemplo indican que los bienes X e Y serán bienes independientes, es decir no son ni sustitutos ni complementarios. Esto no siempre sucederá con otro tipo de preferencias representadas con otras funciones de utilidad distintas a las del ejemplo.

predicciones mas precisas a la manera en que le consumidor responde ante cambios en los parámetro de su entorno.

Demanda del Mercado

Anteriormente hemos trabajado con la función de demanda de un individuo, de un consumidor representativo. Si suponemos ahora que el mercado de un producto X en una determinada región está constituída por N individuos, la demanda del mercado simplemente se obtendrá multiplicando las cantidades demandadas a cada nivel de precios por la cantidad de consumidores idénticos al consumidor representativo que analizamos recién.

Así, si X(Px,Py,M) es la forma funcional general de la demanda de un individuo representativo y en el mercado existen N individuos la demanda del mercado será:

$$N * X(Px, Py, M)$$

Si no existieren consumidores representativos en el sentido que las preferencias de la población son muy dispares, debería obtenerse la demanda de cada individuo en base a sus preferencias y sumarlas una por una, así:

Demanda de Mercado de X = $\sum_{i}^{N} X_i(Px, Py, M)$

Continuando con el ejemplo anterior, si existen en el mercado 700 indiviudos la demanda del mercado será:

$$X = 700\frac{2}{3}\frac{M}{Px}$$

En general, cuando existan N individuos la demanda de mercado en general dependerá de Px, Py, M y N así:

$$X(Px, Py, M, N) = \frac{2}{3}N\frac{M}{Px}$$

Elasticidad.

Si bien en Economía I se introdujeron los conceptos fundamentales de elasticidad, aquí generalizaremos las fórmulas para poder aplicarlas. Esencialmente, trabajaremos con fórmulas que permitan obtener la elasticidad punto para cualquier tipo de funciones de demanda y no solamente funciones de demanda sencillas como las de especificación lineal vistas en el curso anterior.

En general, dada una función de demanda de mercado que depende de varios parámetros, por ejemplo:

$$X^d = X(Px, Py, M)$$

La elasticidad punto de la demanda de X con respecto a su propio precio se obtiene como:

$$\varepsilon_{p_x}(P_x, P_y, M) = \frac{\partial X(P_x, P_y, M)}{\partial P_x} \frac{P_x}{X(P_x, P_y, M)}$$

Donde $X(P_x, P_y, M)$ representa la función general de demanda del bien X como una función de (P_x, P_y, M). Observe que la elasticidad precio es una ***función*** de (P_x, P_y, M)

Ilustremos lo anterior por medio de un ejemplo: Supongamos un consumidor representativo cuyas preferencias pueden representarse por medio de una determinada función de utilidad que luego de optimizarla resulta la siguiente función de demanda:

$$X(Px, Py, M) = 800\left(\frac{M}{Px} - \frac{5Py^2}{14Px^2}\right)$$

Para obtener ahora la función Elasticidad precio de la demanda de Mercado, simplemente aplicamos sobre ella la fórmula de la misma, así:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{Px}(P_x, P_y, M) &= \frac{\partial X(P_x, P_y, M)}{\partial P_x} \frac{P_x}{X(P_x, P_y, M)} \\
&= \frac{\partial[800(\frac{M}{Px} - \frac{5Py^2}{14Px^2})]}{\partial P_x} \frac{Px}{800(\frac{M}{Px} - \frac{5Py^2}{14Px^2})} \\
&= -\frac{14PxM - 10Py^2}{14PxM - 5Py^2}
\end{aligned}$$

De esta manera hemos obtenido la fórmula que permite encontrar la elasticidad precio en cualquier punto de la curva (Px,Py,M) de la función de demanda derivada en base a las preferencias descriptas por la función de utilidad de este nuevo ejemplo.

Podemos ahora calcular la elasticidad precio de la demanda del bien X cuando el precio de Y es de 3, el ingreso de 100 y actualmente el producto X se está vendiendo a 2. Sustituyendo en la fórmula de recién queda:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{Px}(Px, Py, M) &= -\frac{14PxM - 10Py^2}{14PxM - 5Py^2} \\
\varepsilon_{Px}(2,3,100) &= -\frac{14*2*100 - 10*3^2}{14*2*100 - 5*3^2} \\
\varepsilon_{Px}(2,3,100) &= -0.983666
\end{aligned}$$

Con lo cual si el precio de y es de \$3, los ingresos de los consumidores son de \$100, y actualmente se está cobrando un precio de \$2, si se incrementa el precio de X en un 1% las cantidades demandas del bien se reducirán en solo un 0.983% aproximadamente, con la cual la demanda en ese punto es inelástica.

Por otro lado la elasticidad Ingreso y las elasticidad Cruzada se calculan como

$$\varepsilon_M(P_x, P_y, M) = \frac{\partial X(P_x, P_y, M)}{\partial M} \frac{M}{X(P_x, P_y, M)}$$

$$\varepsilon_{Py}(P_x, P_y, M) = \frac{\partial X(P_x, P_y, M)}{\partial P_y} \frac{P_y}{X(P_x, P_y, M)}$$

respectivamente.

Si continuamos con el ejemplo anterior, y aplicando dichas fórmulas a la función de demanda que derivamos anteriormente, resulta:

$$\begin{aligned}\varepsilon_M(P_x, P_y, M) &= \frac{\partial X(P_x, P_y, M)}{\partial M} \frac{M}{X(P_x, P_y, M)} \\ &= \frac{\partial[800(\frac{M}{Px} - \frac{5Py^2}{14Px^2})]}{\partial M} \frac{M}{800(\frac{M}{Px} - \frac{5Py^2}{14Px^2})} \\ &= \frac{14M\,Px}{14M\,Px - 5Py^2}\end{aligned}$$

Que es la expresión que permite calcular la elasticidad ingreso a partir de una función de demanda

$$\begin{aligned}\varepsilon_{Py}(P_x, P_y, M) &= \frac{\partial X(P_x, P_y, M)}{\partial P_y} \frac{P_y}{X(P_x, P_y, M)} \\ &= \frac{\partial[800(\frac{M}{Px} - \frac{5Py^2}{14Px^2})]}{\partial Py} \frac{Py}{800(\frac{M}{Px} - \frac{5Py^2}{14Px^2})} \\ &= \frac{10Py^2}{14M\,Px - 5Py^2}\end{aligned}$$

Que es la expresión que permite calcular la elasticidad cruzada a partir de una función de demanda

Si continuamos con el ejemplo anterior en donde el Px=2, Py=3 y M=100, las respectivas elasticidades ingreso y cruzada son de:

$$\varepsilon_M(2,3,100) = 1,016333$$
$$\varepsilon_{Py}(2,3,100) = -0,326678$$

Lo cual indica que el bien en ese punto es un bien normal, pues su elasticidad ingreso es positiva y por otro lado es el bien Y es un bien complementario en ese punto de la demanda pues su elasticidad cruzada es negativa.

Elasticidad Precio y Toma de decisiones en materia de fijación de Precios

Una de las aplicaciones y usos más importante del concepto de elasticidad es la relación que existe entre el Gasto Total del Consumidor o Ingresos Totales del Productor con la elasticidad precio de la Demanda. La comprensión de esta relación será crucial a la hora de tomar decisiones en cuanto a fijación de precios que se comercializa en su empresa con el fin de maximizar los beneficios. Empecemos por definir el gasto del consumidor, o lo que es lo mismo el Ingreso Total (IT)de los productores que venden el producto

$$IT(P) = P\ Q(P)$$

Lo que significa que el gasto es el producto del precio por la cantidad. Noten que ambas variables, precio y cantidad, aparecen en la función de demanda. Noten además que estas variables no varían en forma independiente sino que varían en sentido opuesto: si aumenta el precio la cantidad demanda disminuye y si baja el precio la cantidad demandada aumenta. Ante este movimiento opuesto del precio y la cantidad, es decir cuando uno sube el otro baja, no queda clara en que dirección (aumento o disminución) se mueve el Gasto Total del Consumidor. Sin embargo el concepto de elasticidad precio de la demanda es aquí sumamente útil pues de alguna manera nos dice cual de las dos variables ha aumentado o disminuido en mayor proporción.

Por ejemplo si el precio aumenta y por ende la cantidad baja (acorde a la ley de la demanda) y si además sabemos que la elasticidad es en valor absoluto mayor que uno (elástica) esto nos dice que la disminución de la cantidad es mayor que el aumento del precio, por ende el gasto total compuesto por P*Q deberá necesariamente disminuir pues la reducción de las cantidades (que reduce el Gasto) domina al aumento del precio (el cual tiende a aumentar al Gasto).

Análisis similares pueden efectuar para casos de baja en el precio. En esta situación, la baja del precio tiende a bajar el Gasto del Consumidor, pero la baja del precio genera un aumento en las cantidades demandadas, lo cual tiende a aumentar el Gasto Total. Para saber cual de los dos efectos predomina, hay que apelar al concepto de elasticidad. Si esta resultare ser inelástica, el aumento en las cantidades es proporcionalmente menor que la caída en el precio por lo que el Gasto Total tenderá a disminuir. Lo contrario ocurre si la demanda es elástica, dominará el efecto cantidad y aumentará el Gasto Total.

Como conclusión podemos establecer que siempre que la elasticidad precio de la demanda sea menor que uno en valor absoluto los productores del bien deberán aumentar el precio con el fin de maximizar sus ingresos. Visto desde otro modo si las elasticidad precio de un bien es mayor que uno en valor absoluto los empresarios no estarían maximizando beneficios y sería útil que lo incrementasen.

Lo dicho anteriormente en un lenguaje conceptual puede formalizarse utilizando un lenguaje algebraico como sigue.

Primero a la hora de decidir si es necesario modificar los precios, debemos preguntarnos que sucedería con el Ingreso Total si se incremente en una cantidad infinitesimal los precios del productos, es decir debemos computar la derivada del Ingreso con respecto al Precio del Producto como sigue:

$$\frac{dIT(P)}{dP} = Q(P) + P\frac{dQ}{dP}$$

Si multiplicamos el segundo termino del segundo miembro por $\frac{Q(P)}{Q(P)}$ y reordenando términos se tiene que:

$$\frac{dIT(P)}{dP} = Q(P) + Q(P)\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q(P)}$$

Sacando factor común Q y recordando la definición de elasticidad precio, resulta:

$$\frac{dIT(P)}{dP} = Q(P)[1+\varepsilon_{PX}(P)]$$

Por último si los empresarios desean maximizar sus ingresos deberán igualar a cero $\frac{dIT(P)}{dP}$

Por lo tanto para hallar el valor del precio que hace cero la derivada del Ingreso con respecto al precio del producto, se debe elegir un precio tal que su elasticidad sea igual a -1, es decir elasticidad unitaria[3]. De esa manera, para cuando se fija un precio tal que la elasticidad precio del bien es uno, se están maximizando los ingresos de la firma. Por otro lado si la elasticidad es menor que uno en valor absoluto, es decir está entre 0 y -1, un incremento de los precios aumenta los ingresos pues $\frac{dIT(P)}{dP}$ será mayor que cero[4] ya que $[1+\varepsilon_{PX}(P)]$ será positivo. Lo contrario en el caso que la elasticidad sea mayor que 1 en valor absoluto.

Continuando con el ejemplo anterior, en donde habíamos obtenido una elasticidad precio de la demanda igual a -0,98 aproximadamente, no encontramos que los productores pueden aumentar el precio del producto X y sus ingresos aumentarán

[3] Esto es así ya que para anular un producto al menos uno de los dos factores debe ser nulo. Como Q son cantidades positivas, el corchete de la expresión debe anularse para anular el producto.

[4] Recuerde que si una función presenta derivada positiva, la misma es una función que crece ante aumento de la variable independiente