Departamento de Estadística y Matemática

Documento de Trabajo Nº 5

Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de Córdoba

El Teorema de la Envolvente y sus Aplicaciones en Economía

Jorge Mauricio Oviedo [1]

Resumen: El presente trabajo tiene por objetivo desarrollar con un enfoque matemático el Teorema de la Envolvente de gran utilización en la Teoría Económica. Se encuentra en el mismo una explicación que conecta los resultados teóricos con la intuición geométrica que da nombre al mismo. Los famosos lemas de Hotelling, Shephard y de Roy se deducen como ejemplos de aplicación. El clásico problema de la envolvente de los Costos Medios de Corto Plazo se encuentra también fundamentado matemáticamente en este ensayo.

Palabras clave: Optimización, Función Lagrangeana, Función de Valor, Condición de Primer Orden, Multiplicadores de Lagrange, Efectos Directos, Efectos Indirectos.

[1] joviedo@eco.unc.edu.ar

1.- Teorema de la Envolvente: Caso Optimización Libre

$$\max_{x} f = f(x,a)$$

De las condiciones de primer orden se tiene que:

$$f_x(x,a) = 0$$

Vía el teorema de la función implícita y bajo el supuesto de que f_{xx} sea distinto de cero se tiene que:

$$x^* = x(a)$$

Sustituyendo esta expresión en la función objetivo para obtener así la función indirecta o función de valor queda:

$$V(a) = \max_{x} f(x,a) = f^*[x(a),a]$$

Si uno observa la función de valor puede deducir que un cambio en los parámetros afecta a *V* por dos canales. Un canal directo, descripto por la funcionalidad de *f* con respecto a *a* y un canal indirecto, ya que *a* también repercute sobre la elección optima y esta vía la dependencia de *f* con respecto a *x*.
Derivando luego con respecto al parámetro a *a* obtiene:

$$\frac{dV(a)}{da} = f_x[x(a),a]x'(a) + f_a[x(a),a]$$

Si se recuerda la condición de primer orden la expresión se simplifica a:

$$\frac{dV(a)}{da} = f_a[x(a),a]$$

Ese resultado establece que ante una variación en el parámetro la función de valor solo se ve afectada por el efecto directo sobre *f*. El efecto indirecto desaparece pues si bien un cambio en *a* afecta a *x*, *x* tiene prohibido afectar a *f* a raíz de que f_x es cero en virtud de la optimalidad de *x*. Al romperse el canal de los efectos indirectos solo el efecto directo sobrevive.

Este teorema tiene una magnifica interpretación geométrica. Si se graficase la función de valor *V(a)*colocando a sobre las abcisas y en el mismo plano se graficasen varias funciones objetivos *f(x,a)* (una para cada valor de *x*[2]) se podría observar que la función de valor se encuentra por definición siempre por encima de las demás funciones excepto en el caso en que los valores de *a* y *x* son tales que x es el optimo que maximiza *f* para el valor de *a* considerado en las abcisas. En ese único caso la función de valor, *V(a)*, y la función objetivo, *f[x(a),a]*, se tocan en ese punto siendo en consecuencia tangentes. Al ser tangentes tienen la misma pendiente y esa pendiente es precisamente $f_a[x,a]$ para la gráfica de *f[x(a),a]* ya que el valor de *x* está fijado para esa grafica en particular. Entonces es justamente el hecho de que cada curva de la función objetivo (no maximizada) sea tangente a la función de Valor en un único punto, y todos los demás valores se encuentren por debajo, lo que hace que se verifique el teorema demostrado anteriormente. Ahora bien, geométricamente, la función de valor es pues la envolvente superior de cada una de las funciones objetivos, estando constituida por un único punto de cada una de ellas (en donde se verifica que *x* es el optimo para el valor correspondiente de *a*), y es esa propiedad de envolvente lo que demuestra el teorema y lo que da pues su nombre.

1.2.- <u>Aplicaciones en Economía</u>:

La Envolvente de Costos Medios De Corto Plazo:

Un tópico clásico en microeconomía es hallar el tamaño de planta óptimo que permite producir un determinado nivel de producción a un costo unitario mínimo. Cuando se permite variar el tamaño de la planta de producción, simbolizada por la variable capital (*k*), se supone que se está en un horizonte de planeación de Largo Plazo. Para ello el problema se expresa en éstos términos[3]:

---

[2] nuevamente colocando *a* en las abcisas y tomando a *x* como un parámetro fijo.

[3] El problema de Largo Plazo es el siguiente:

$$\min_{l,k} CT = wl + rk$$

$$st: \; f(l,k) = Q$$

$$\min_{x} CMe = g(k,Q)$$

Minimizando dicha función con respecto a k se tendrá:

$$g_k(k,Q) = 0 \quad \Rightarrow \; k^* = k(Q)$$

Esta última expresión selecciona para cada nivel deseado de producción el tamaño de planta óptimo en el sentido que minimiza su costo unitario de producción. Evaluando la función objetivo en el óptimo, resulta la conocida función de Costos Medios de Largo Plazo de la empresa:

$$CMeL(Q) = \min_{k} CMe(k,Q) = CMe[k^*(Q),Q]$$

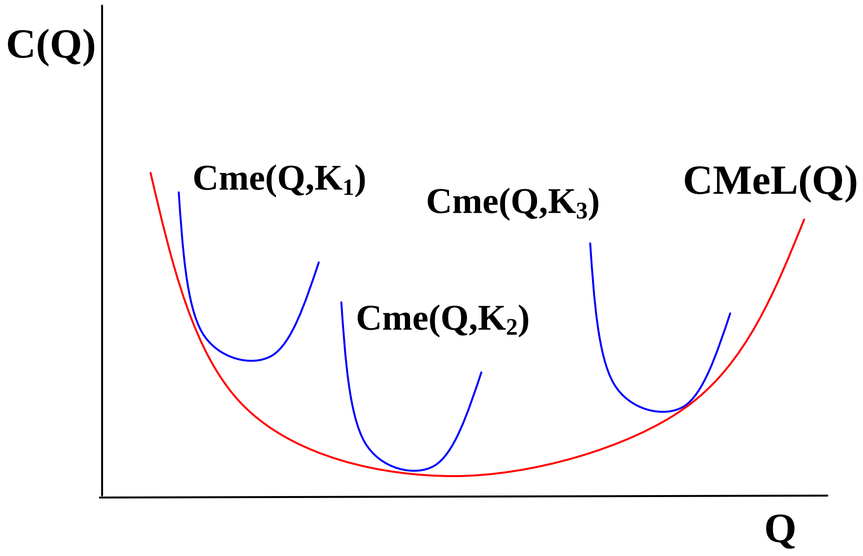
En el corto plazo en cambio al no poderse modificar el tamaño de la planta la función de costos medios depende únicamente del nivel de producción deseado Q. de esta forma al estar dado el stock de capital la función de costos medios de Corto Plazo se expresa así:

$$CMe(Q,\overline{k}) = g(Q,\overline{k})$$

Si se grafican ahora distintas funciones de costos medios para distintos niveles de capital, y conjuntamente la función de costos medios de largo plazo se tendrá que ésta última es la envolvente inferior de cada una de las curvas de corto plazo.

---

sin embargo de la restricción puede despejarse *l* en términos de *Q* y *k* y sustituirlo en la función objetivo de modo que solo quede una funcionalidad en términos de Q y k como se expresa aquí.



Como resultado de esta envolvente y de las tangencias en un único punto, se comprueba que en el Largo plazo solo los efectos directos (CTQ) afectan la variación del costo medio de Largo Plazo[4].

.

2.- Teorema de la Envolvente: Caso Optimización Restringida

Considérese ahora el siguiente Problema

$$\max_{x,y} f = f(x,y,a)$$
$$st: \quad g(x,y,a) = 0$$

con lo que la función Lagrangeana será:

[4] Obsérvese como en el único caso en que milagrosamente resulte $CMeL_Q(Q) = 0$ coincidirá la tangencia de CMeLP con el punto de Costo Medio Mínimo de Corto Plazo (Mínimo con respecto a Q, manteniendo fijo el nivel de capital). En el resto de los casos la tangencia se producirá en cualquier otra parte de las Curvas de Corto Plazo. Este resultado fue descubierto por Jacob Viner en 1930, cuando detectó la imposibilidad de trazar una envolvente geométrica de las curvas de Corto plazo de modo que cada tangencia se produjera en el punto de mínimo de éstas.

$$\max_{x,y,\lambda} L = f(x,y,a) - \lambda g(x,y,a)$$

de las condiciones de primer Orden se obtiene:

$$\begin{cases} L_x = f_x(x,y,a) - \lambda g_x(x,y,a) = 0 \\ L_y = f_y(x,y,a) - \lambda g_y(x,y,a) = 0 \\ L_\lambda = -g(x,y,a) = 0 \end{cases}$$

de la solución del sistema anterior se obtienen[5]:

$$\begin{aligned} x^* &= x(a) \\ y^* &= y(a) \\ \lambda^* &= \lambda(a) \end{aligned}$$

Sustituyendo las solucione óptimas en la Función Lagrangeana se arriba a la función de valor:

$$\max_{x,y,\lambda} L = L^*(a) = f[x(a),y(a),a] - \lambda(a) g[x(a),y(a),a]$$

Derivando L con respecto a a:

$$\begin{aligned} &\frac{dL^*(a)}{da} = f_x[x(a),y(a),a]x'(a) + f_y[x(a),y(a),a]y'(a) + f_a[x(a),y(a),a] - \\ &-\lambda'(a)g[x(a),y(a),a] + \lambda(a)\{g_x[x(a),y(a),a]x'(a), g_y[x(a),y(a),a]y'(a) + \\ &+g_a[x(a),y(a),a]\} \end{aligned}$$

Teniendo reagrupando términos convenientemente se tiene:

---

[5] Adviértase que por el Teorema de la función implícita las soluciones optimas pueden considerarse función del parámetro *a* en virtud de la no nulidad del Jabiano, ya que éste es simplemente el determinante de la

$$\frac{dL^*(a)}{da} = \{f_x[x(a),y(a),a] - \lambda(a)g_x[x(a),y(a),a]\}x'(a) +$$
$$\{f_y[x(a),y(a),a] - \lambda(a)g_y[x(a),y(a),a]\}y'(a) + f_a[x(a),y(a),a] -$$
$$-\lambda'(a)g[x(a),y(a),a] + f_a[x(a),y(a),a] - \lambda(a)g_a[x(a),y(a),a]$$

Teniendo en cuenta por medio de la Condición de Primer Orden que[6]:

$$\begin{cases} f_x[x(a),y(a)] - \lambda(a)g_x[x(a),y(a)] \equiv 0 \\ f_y[x(a),y(a)] - \lambda(a)g_y[x(a),y(a)] \equiv 0 \\ g[x(a),y(a)] - a \equiv 0 \end{cases}$$

se deduce que:

$$\frac{dL^*(a)}{da} = f_a[x(a),y(a),a] - \lambda(a)g_a[x(a),y(a),a]$$

Por otro lado si se observa que en el óptimo la restricción $g(x,y)$ es igual a 0, la función de Lagrange evaluada en el óptimo es igual a la función f maximizada. Por lo tanto:

$$\frac{df^*[x(a),y(a),a]}{da} = f_a^*[x(a),y(a)] = f_a[x(a),y(a),a] - \lambda(a)g_a[x(a),y(a),a]$$

Con lo que, a similitud del caso anterior, los efectos directos determinan el impacto en la función objetivo mientras que los indirectos desaparecen.

3.- <u>Importancia y Uso en Economía</u>

---

matriz hessiana y la misma no puede anularse si se exige la condición suficiente de Segundo Orden como necesaria.

[6] Obsérvese como las relaciones se expresan como identidades pues las expresiones que se enchufan en las condiciones de primer orden surgieron justamente de las mismas ecuaciones.

Es muy frecuente en Economía intentar recuperar las elecciones óptimas de los agentes en base a datos referentes de su función indirecta (Función de Valor). Ejemplos de tales situaciones son las siguientes:

Ejemplo a.- *Sea* $BT(w,r,P)$ *la función de Beneficios Indirecta de una empresa que vende su producto a un precio P y compra insumos productivos Capital (K) y Trabajo (L) a precios r y w respectivamente, recupere las funciones de oferta de Bien y las demandas de Insumos K y L maximizadoras de beneficios.*

Antes que nada téngase presente que la función de beneficios indirecta surge del siguiente problema de optimización:

$$\max_{k,l} BT = pf(l,k) - wl - rk$$

Siendo *f(l,k)* la función de producción de la empresa.
Dicha función indirecta es función de *(w,r,P)* una vez que esta ha sido maximizada por lo que si se deriva con respecto a los parámetros considerados se obtienen los siguientes resultados acorde al Teorema de la Envolvente:

$$\frac{\partial BT(w,r,P)}{\partial P} = f[l*(w,r,P),k*(w,r,P)]$$
$$\frac{\partial BT(w,r,P)}{\partial w} = -l*(w,r,P)$$
$$\frac{\partial BT(w,r,P)}{\partial r} = -k*(w,r,P)$$

De lo anterior se desprende que las funciones demanda de insumos maximizadotas de beneficios de la empresa y su respectiva función de oferta de bien son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
l^*(w,r,P) &= -\frac{\partial BT(w,r,P)}{\partial w} \\
k^*(w,r,P) &= -\frac{\partial BT(w,r,P)}{\partial r} \\
f[l^*(w,r,P),k^*(w,r,P)] &= \frac{\partial BT(w,r,P)}{\partial P}
\end{aligned}
$$

Los resultados de este ejemplo son conocidos en la Teoría Microeconómica como **"Lema de Hotelling"**

Ejemplo b.- *Sea* $CT(w,r,Q)$ *la función de Costos Indirecta de una empresa que compra insumos productivos Capital (K) y Trabajo (L) en mercados perfectamente competitivos a precios r y w respectivamente. Recupere las funciones de demandas condicionadas de Insumos K y L.*

Antes que nada téngase presente que la función de Costos de Largo Plazo (función Indirecta de Costos) surge del siguiente problema de optimización restringida:

$$
\begin{aligned}
&\min_{l,k} CT = wl + rk \\
&st: \quad f(l,k) = Q
\end{aligned}
$$

Siendo *f(l,k)* la función de producción de la empresa.
Dicha función indirecta es función de *(w,r,Q)* una vez que esta ha sido minimizada por lo que si se deriva con respecto a los parámetros considerados se obtienen los siguientes resultados acorde al Teorema de la Envolvente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial CT(w,r,Q)}{\partial w} &= l^*(w,r,Q) \\
\frac{\partial CT(w,r,Q)}{\partial r} &= k^*(w,r,Q)
\end{aligned}
$$

De lo anterior se desprende que las funciones demanda condicionadas de insumos de la empresa son las siguientes:

$$l*(w,r,Q) = \frac{\partial CT(w,r,Q)}{\partial w}$$
$$k*(w,r,Q) = \frac{\partial CT(w,r,Q)}{\partial r}$$

Los resultados de este ejemplo son conocidos en la Teoría Microeconómica como **“Lema de Shephard”**

Ejemplo c.- *Sea la función de Utilidad Indirecta de un individuo que consume dos bienes X e Y en mercados perfectamente competitivos a precios Px y Py respectivamente poseyendo una renta monetaria M. Recupere las funciones de demandas de dicho individuo.*

Antes que nada téngase presente que la función de Utilidad Indirecta surge del siguiente problema de optimización restringida:

$$\max_{x,y} U = U(x,y)$$
$$st: \quad p_x x + p_y y - M = 0$$

Dicha función indirecta es función de *(px,py,M)* una vez que esta ha sido maximizada por lo que si se deriva con respecto a los parámetros considerados se obtienen los siguientes resultados acorde al Teorema de la Envolvente:

$$\frac{\partial U*(p_x,p_y,M)}{\partial p_x} = -\lambda(p_x,p_y,M)x*(p_x,p_y,M)$$
$$\frac{\partial U*(p_x,p_y,M)}{\partial p_y} = -\lambda(p_x,p_y,M)y*(p_x,p_y,M)$$

Obsérvese que se necesita recurrir a algún artilugio para lograr depurar los resultados de esas derivadas a los fines de desenmascarar de la función indirecta las verdaderas funciones de demanda del individuo. Procediendo como se detalla a continuación se obtiene lo siguiente vía la aplicación una vez más del Teorema de la Envolvente:

$$\frac{\dfrac{\partial U^*(p_x, p_y, M)}{\partial p_x}}{\dfrac{\partial U^*(p_x, p_y, M)}{\partial M}} = -x^*(p_x, p_y, M)$$

$$\frac{\dfrac{\partial U^*(p_x, p_y, M)}{\partial p_y}}{\dfrac{\partial U^*(p_x, p_y, M)}{\partial M}} = -y^*(p_x, p_y, M)$$

De lo anterior se desprende que las funciones de demanda del individuo son las siguientes:

$$x^*(p_x, p_y, M) = -\frac{\dfrac{\partial U^*(p_x, p_y, M)}{\partial p_x}}{\dfrac{\partial U^*(p_x, p_y, M)}{\partial M}}$$

$$y^*(p_x, p_y, M) = -\frac{\dfrac{\partial U^*(p_x, p_y, M)}{\partial p_y}}{\dfrac{\partial U^*(p_x, p_y, M)}{\partial M}}$$

Los resultados de este ejemplo son conocidos en la Teoría Microeconómica como **“Lema de Roy”**

BIBLIOGRAFIA

Alpha C. Chiang: "*Métodos Fundamentales de Economía Matemática*". Tercera Edición. McGraw-Hill. 1998.

Intriligator, Michael D (1971)**.** "*Mathematical optimization and economic theory*". Prentice-Hall.

Kreps 1995, "*Curso de Teoría Microeconómica*". McGraw-Hill. Madrid. España

Simon and Blume "*Mathematics for Economist*" W. W. Norton, New York. 1994.

Varian, Hal R "*Análisis microeconómico"* 3. ed. A. Bosch.. Barcelona 1992

Varian, Hal R "*Microeconomía intermedia : un enfoque moderno*" 3. ed. A. Bosch Barcelona 1994.