Matriz de Insumo-Producto y La Inversa de Leontief – Cálculo por medio de Maple, Mathemática, Gauss, Matlab y Macros en Excel

Jorge Mauricio Oviedo [1]

Resumen: El presente trabajo tiene por objetivo brindar un enfoque teórico accesible sobre Matriz Insumo Producto e Inversa de Leontieff y su implementación diversos Softwares. Para llevar a cabo dicha tarea se presenta una revisión teórica de tal tópico y se procede a implementarlo en todo tipo de sofware tanto algebraico y numérico. Se exponen y se comparan alternativamente las resoluciones numéricas contra las algebraicas evaluando la eficiencia en cada programa. Se proveen además los códigos de programación usados en cada Software.

Palabras clave: Matriz Insumo producto, Inversa de Leontieff, Métodos Numéricos, Maple, Mathematica, Matlab, Gauss, Excel, Macros, Visual Basic

[1] joviedo@eco.unc.edu.ar

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Si observamos el completo funcionamiento económico de nuestra sociedad desde un cierto punto de vista esencial, hallamos una imagen sorprendentemente simple de él. Un fisiólogo inglés, W. Harvey (1578-1657), descubrió a principios del siglo XVII el mecanismo de la circulación de la sangre en el cuerpo humano. Su descubrimiento marcó un hito en la historia de la fisiología. Un siglo mas tarde, aproximadamente, F. Quesnay (1694-1774), médico de la corte del Rey de Francia, Luis XV, ideó un esquema al que llamó TABLEAU ECONOMIQUE, para representar el flujo de productos intercambiados entre las tres clases que componían la sociedad: AGRICULTORES, TERRATENIENTES Y MANUFACTUREROS; él lea llamó respectivamente clase productiva, clase propietaria y clase estéril, basadas en sus ideas fisiocráticas.

El trabajo de Quesnay fue el precursor del análisis Input-Output de las relaciones interindustriales, que fue desarrollado sistemáticamente en los años treinta por el economista americano Wassily W. Leontief nacido en 1905. Aunque a mediados del siglo XIX, Karl Marx intentó un análisis del proceso capitalista, es a Leontief a quien se debe el haber profundizado y desarrollado la idea de Quesnay hasta convertirla en una poderosa herramienta del análisis económico.

CUADRO DE TRANSACCIONES INTERINDUSTRIALES

Basándonos en las ideas de Quesnay, supongamos un país agrícola cuya vida económica anual se basa en bienes agrícolas (sector agropecuario), los bienes industriales y la tierra (sector industrial), y prestaciones de servicios (sector servicios).

La población de dicho país se divide en tres clases ya mencionada, las cuales producen bienes de acuerdo con sus respectivas funciones y participan en su distribución. Para distribuir los bienes entre los miembros de la sociedad, se intercambian en el mercado entre las tres clases mediante compras y ventas, y de ello resulta un FLUJO ESTACIONARIO DE BIENES que se repite año a año.

ventas \ compras	demanda intermedia Agro.	Ind.	Serv.	Total de Ventas
Sector Agro.	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\sum_{j=1}^{3} x_{1j}$
Sector Ind.	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\sum_{j=1}^{3} x_{2j}$
Sector Serv.	x_{31}	x_{32}	x_{33}	$\sum_{j=1}^{3} x_{3j}$
Total de Compras	$\sum_{i=1}^{3} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{3} x_{i2}$	$\sum_{i=1}^{3} x_{i3}$	

Esta es una tabla de transacciones interindustriales, que muestra como se interrelacionan todas las industrias, en el sentido de que cada una adquiere productos fabricados por las demás, a fin de llevar a cabo su propio proceso.

Cada elemento X_{ij} dentro del cuerpo de la tabla representa en valor monetario las compras que las empresas del sector i han efectuado a otras empresas del sector j.

Podemos observar que:

Xij $i \neq j$ *representa las compras de un sector con respecto a otro distinto.*

Xij $i = j$ representa las compras de un sector con respecto al mismo sector.

Se lee:

HORIZONTALMENTE La fila de una clase o sector muestra el valor de las ventas por cada comprador y el valor total de la s ventas en términos monetarios; ésta última representada por la cuarta columna.

VERTICALMENTE La columna de cada clase o sector representa el valor de las compras por cada vendedor y el valor total de las compras, en términos monetarios; ésta última representada por la cuarta fila.

Por último las compra y ventas totales son iguales para cada clase.

Hemos admitido hasta el momento el supuesto de expresar la tabla de transferencias interindustriales en términos monetarios y no físicos, ya que éste último traería una complejidad al momento de sumar y obtener la última linea:

SUMA HORIZONTAL, o por filas;es posible ya que representa las ventas de un mismo sector destinadas a satisfacer los requerimientos de los sectores y por lo tanto se expresan en la misma unidad de medida.

SUMA VERTICAL, o por columnas; no tiene sentido, ya que cada cifra representa una compra efectuada a otro sector de producción y por lo tanto está expresasa en diversas unidades de medida.

Por lo tanto es necesario que las cifras de una tabla de transacciones interindustriales deben estar expresadas en valores monetarios (pesos) para que tenga sentido sumarlas tanto horizontalmente (ventas) como verticalmente (compras).

Lo dicho anteriormente implica que además de conocer las cantidades físicas intercambiadas entre los sectores, necesitamos disponer de los precios unitarios correspondientes a esos bientes a fin de expresas cada trandacción en su valor monetario multiplicando el precio por la cantidad respectiva.

ESTRUCTURA DE UN MODELO CON N SECTORES

Puesto que un modelo de insumo-producto suele incorporar un gran número de industrias, su esquema es por fuerza bastante complicado. Para simplificar el problema adoptaremos las siguientes hipótesis o supuestos económicos:

- Cada sector produce solo una mercancía homogénea.
- Cada sector usa una relación fija de insumo para la obtención de su producto.
- La producción en cada sector está sujeta a rendimientos constantes a escala.

Podemos expresar una tabla de transacciones interindustriales de la manera siguiente:

compras / ventas	sectores I	II	III	...	N	total de ventas
I	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}	X_1
II	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}	X_2
III	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_{3n}	X_3
:	:	:	:		:	:
N	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	...	x_{nn}	X_n

En la cual hemos omitido la cuarta fila y definimos a:

$$[1] \qquad X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \; ; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Podemos expresarlo en forma matricial si:

$$X_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

En donde X_i representa el vector de la producción bruta del sector i y la matriz B la cual representa la matriz de transformaciones interindustriales en términos monetarios.

De modo que si:

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} \end{cases}$$

O sea

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora para conseguir la cadena de reacciones que tienden a modificar todo el flujo de transacciones interindustriales, debemos elaborar una segunda tabla, que se conoce con el nombre de MATRIZ DE COEFICIENTES DE REQUERIMIENOS DIRECTOS POR UNIDAD DE PRODUCCION BRUTA.

Para ello tomamos el cuadro de transacciones intersectoriales y razonamos de la manera siguiente:

En cada transacción existen dos sectores, el sector vendedor que indicamos con el subíndice "i", y el sector comprador que indicamos con el subíndice "j" como habíamos mencionado anteriormente.

Relacionando cada x_{ij} con la producción bruta X_i, efectuamos el cociente x_{ij} / X_i el cual define el COEFICIENTE TÉCNICO "a_{ij}"

Cada coeficiente "a_{ij}" represento los requerimientos de insumo del sector "i" necesarios para producir una unidad del producto "j"

Debido a los supuestos económicos mencionados podemos indicar que:

- Productos homogéneos permiten la suma horizontal.
- Tecnología dada que brinda una relación constante entre los insumos.
- Nos permite admitir que los coeficientes técnicos son constantes.

Por el último supuesto podemos expresar a $a_{ij} = x_{ij} / X_i$ *como:*

[2] $X_i = a_{ij} \; x_{ij}$ Donde a_{ij} ,es constante

El cálculo de la matriz de coeficientes esta dado por:

$$
\begin{array}{cccc}
a_{11} = x_{11}/X_1 & a_{12} = x_{12}/X_2 & \Lambda & a_{1n} = x_{1n}/X_n \\
a_{21} = x_{21}/X_1 & a_{22} = x_{22}/X_2 & \Lambda & a_{2n} = x_{2n}/X_n \\
M & M & & M \\
a_{n1} = x_{n1}/X_1 & a_{n2} = x_{n2}/X_2 & \Lambda & a_{nn} = x_{nn}/X_n
\end{array}
$$

Los cuales pueden disponerse en una matriz A = [aij]

OUT-PUT / IN-PUT	I	II	. . .	N
I	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}
II	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}

III a_{31} a_{32} . . . a_{3n}

Regresando al sistema de ecuaciones [1] y reemplazando por [2] nos queda planteado en forma matricial el siguiente sistema:

$$X = A\ X$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

EL MODELO ABIERTO

Si además de los n sectores, el modelo también contiene un sector abierto (digamos, las unidades familiares) que determinen exógenamente una demanda final (demanda sin insumos) para el producto de cada industria y que ofrece un in-put primario (digamos mano de obra) no producido por los propios n sectores, el modelo es un MODELO ABIERTO.

compras / ventas	sectores I	II	III	...	N	demanda final	total de ventas
I	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}	Y_1	X_1
II	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}	Y_2	X_2
III	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_{3n}	Y_3	X_3
:	:	:	:		:	:	:
N	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	...	x_{nn}	Y_n	X_n

Si incorporamos el sector exógeno algebraicamente tendríamos:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_i + Y_i$$

Y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

O bien:

$$[3] \qquad \boxed{X = A\,X + Y}$$

Hay que tener presente que éste sector externo puede estar subdividido o bien construido por demandas de distintos sectores a la vez.

Si Yi es la demanda final del sector i, constituida por la suma de la demanda de consumidores finales "Ci" mas la demanda de los sectores de inversión "Ii" mas la demanda del sector gobierno "Gi", podríamos escribir:

$$Yi = Ci + Ii + Gi$$

O bien:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix}$$

Pero para simplificar seguiremos utilizando el vector Y y obtener de ésta manera un vector X (nivel de producción bruta) que satisfaga la demanda intermedia y la demanda final:

Partiendo de [3] tenemos:

$$X = A\,X + Y$$

$$X - A\,X = Y$$

$$(I - A)\,X = Y$$

$$(I - A)^{-1}\,(I - A)\,X = (I - A)^{-1}\,Y$$

$$I\,X = (I - A)^{-1}\,Y$$

$$\boxed{X = (I - A)^{-1}\,Y}$$

Donde la matriz $(I - A)$ se denomina MATRIZ DE LEONTIEF y la matriz $(I - A)^{-1}$ MATRIZ INVERSA DE LEONTIEF, o matriz de coeficientes de requerimientos directos e indirectos por unidad de demanda final.

La explicación económica es la siguiente:

En vista de la presencia del sector exógeno la suma de los elementos de cada columna de la matriz de coeficientes A debe ser menos que 1(uno); cada suma de una columna representa el costo del input parcial (que no incluye el costo del insumo primario, vg. Pagar sueldos) en el que se incurre al producir por valor de un peso, algún bien; y por ser un costo, si ésta suma es mayor o igual a uno la producción no estará justificada desde el punto de vista económico. Simbólicamente éste hecho puede enunciarse así:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \qquad (j = 1, 2, ..., n)$$

También podemos establecer que puesto que el valor de la producción (1 peso) debe ser totalmente absorbido por el pago a todos los factores de la producción, o sea la diferencia que falta para llegar a un peso es recibida como pago por los trabajadores. La cual estará dada por la cantidad que le falta a la suma de la columna para llegar a uno:

$$1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \qquad (j = 1, 2, ..., n)$$

MODELO CERRADO

Si se incluye en el sistema el sector exógeno del modelo abierto de insumo producto como si fuera otra industria, el modelo se convertirá en un modelo cerrado.

Ahora, por su naturaleza, todos los bienes serán intermedios, porque todo lo que se produce es para satisfacer los requisitos de insumo de los (n + 1) sectores.

Matemáticamente, la desaparición de las demandas finales significa que ahora habrá un sistema de ecuaciones homogéneo de manera tal que:

$$X = AX + Y$$
$$(X \vdots Y) = A\,(X \vdots Y)$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)(n+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{(n+1)} \end{bmatrix}$$

De modo que el sistema:

$$(X \vdots Y) - A\,(X \vdots Y) = \phi$$
$$(I - A)\,(X \vdots Y) = \phi$$

Este sistema tendrá solución no trivial si y solo si la matriz tecnológica (I – A) tenga su determinante igual a cero $|\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$, económicamente puede desprenderse a veracidad de la condición, de modo que; las soluciones aparecen en un número infinito.

Esto significa que en un modelo no existe una única combinación de producto “correcta”. Podemos determinar los niveles de producción [X_1*, X_2*, ... , $X_{(n+1)}$*] unos en proporción a otros, pero no podemos fijar sus valores absolutos.

PLANEACIÓN DE REQUERIMIENTOS DE PRODUCCIÓN EN EL MODELO ABIERTO

Ahora nos valdremos de la ecuación X = (I - A)-1 Y y de algunas operaciones matriciales para resolver ciertos problemas que se presentan en la planeación económica nacional. Tendremos que poder resolver dos interrogantes:

- ¿ Qué nivel de producción debe alcanzar cada una de las n industrias o sectores de una economía, para satisfacer la demanda total de ese producto?
- ¿ En qué magnitud debe variar el nivel de producción, ante un cambio en la demanda final o sector exógeno; para que satisfaga la demanda total ?

Lo ilustramos con un ejercicio

COMPRAS VENTAS	AGRO. (1)	IND. (2)	SERV. (3)	D.I. 4=1+2+3	CONS. (5)	INV. (6)	P.N. 7=5+6	V.B.P. 8=4+7
AGRO.	650	160	200	1010	380	110	490	1500
IND.	450	350	150	950	825	225	1050	2000
SERV.	350	440	300	1090	1035	875	1910	3000
V. DE INS.	1450	950	650	3050				
ASALAR.	540	310	290					
NO ASAL.	1090	550	670					
V.A.	1630	860	960				3450	
V.B.P.	3080	1810	1610					6500

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{650}{1500} = \frac{13}{30} \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{160}{2000} = \frac{2}{25} \qquad a_{13} = \frac{x_{13}}{X_3} = \frac{200}{3000} = \frac{1}{15}$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} = \frac{450}{1500} = \frac{3}{10} \qquad a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} = \frac{350}{2000} = \frac{7}{40} \qquad a_{23} = \frac{x_{23}}{X_3} = \frac{150}{3000} = \frac{1}{20}$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{X_1} = \frac{350}{1500} = \frac{7}{30} \qquad a_{32} = \frac{x_{32}}{X_2} = \frac{440}{2000} = \frac{11}{50} \qquad a_{33} = \frac{x_{33}}{X_3} = \frac{300}{3000} = \frac{1}{10}$$

La matriz a estará dado por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/30 & 2/25 & 1/15 \\ 3/10 & 7/40 & 1/20 \\ 7/30 & 11/50 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13/30 & 2/25 & 1/15 \\ 3/10 & 7/40 & 1/20 \\ 7/30 & 11/50 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 1 - 13/30 & -2/25 & -1/15 \\ -3/10 & 1 - 7/40 & -1/20 \\ -7/30 & -11/50 & 1 - 1/10 \end{bmatrix}$$

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 17/30 & -2/25 & -1/15 \\ -3/10 & 33/40 & -1/20 \\ -7/30 & -11/50 & 9/10 \end{bmatrix}$$

Calculando el determinante de la matriz (I - A) tenemos:

$$|I - A| = \begin{vmatrix} 17/30 & -2/25 & -1/15 \\ -3/10 & 33/40 & -1/20 \\ -7/30 & -11/50 & 9/10 \end{vmatrix}$$

$$|I - A| = \left(17/30\right)\left(33/40\right)\left(9/10\right) + \left(-2/25\right)\left(-1/20\right)\left(-7/30\right) + \left(-3/10\right)\left(-11/50\right)\left(-1/15\right)$$
$$- \left(-7/30\right)\left(33/40\right)\left(-1/15\right) - \left(-3/10\right)\left(-2/25\right)\left(9/10\right) - \left(17/30\right)\left(-1/20\right)\left(-11/50\right)$$

$$|I - A| = \frac{1499}{4000}$$

La transpuesta de la matriz (I-A) estará dada por

$$(I - A)' = \begin{bmatrix} 17/30 & -3/10 & -7/30 \\ -2/25 & 33/40 & -11/50 \\ -1/15 & -1/20 & 9/10 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{4000}{1499} \begin{bmatrix} 1463/2000 & 13/150 & 59/1000 \\ 169/600 & 89/180 & 29/600 \\ 517/2000 & 43/300 & 887/2000 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.951967979 & 0.231265288 & 0.157438292 \\ 0.751612186 & 1.319398117 & 0.128974872 \\ 0.689793195 & 0.382477207 & 1.183455637 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}(I - A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 33/40 & -11/50 \\ -1/20 & 9/10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2/25 & -11/50 \\ -1/15 & 9/10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2/25 & 33/40 \\ -1/15 & -1/20 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3/10 & -7/30 \\ -1/20 & 9/10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 17/30 & -7/30 \\ -1/15 & 9/10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 17/30 & -3/10 \\ -1/15 & -1/20 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3/10 & -7/30 \\ 33/40 & -11/50 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 17/30 & -7/30 \\ -2/25 & -11/50 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 17/30 & -3/10 \\ -2/25 & 33/40 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}\ (I - A) = \begin{bmatrix} 1463/2000 & 13/150 & 59/1000 \\ 169/600 & 89/180 & 29/600 \\ 517/2000 & 43/300 & 887/2000 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de la matriz inversa reemplazamos en la fórmula $(I - A)^{-1} = \dfrac{\mathrm{Adj}\ (I - A)}{|I - A|}$

Una vez obtenida la matriz inversa de Leontief comprobamos los cálculos con los datos del ejercicio en donde se debía verifcar que para una demanda final dada por el vector de producto neto , formada a su vez por consumo e inversión, la producción bruta total debe satisfacer tanto los requerimientos directos como los indirectos. De éste modo tratamos de resolver el primer interrogante:

Si llamamos $X^{(0)}$ al vector de producción bruta original, y $Y^{(0)}$ el vector de demanda final original el planteo quedaría resuelto para:

$$X^{(0)} = (I - A)^{-1} Y^{(0)}$$

$$X = \frac{4000}{1499}\begin{bmatrix} 1463/2000 & 13/150 & 59/1000 \\ 169/600 & 89/180 & 29/600 \\ 517/2000 & 43/300 & 887/2000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 490 \\ 1050 \\ 1910 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{4000}{1499}\begin{bmatrix} 4497/8 \\ 1499/2 \\ 4497/4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1500 \\ 2000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

Además de describir la actividad económica, la matriz de Insumo Producto es herramienta fundamental para la proyección de la actividad económica en el futuro. Una matriz de Insumo Producto al “descubrir” las relaciones históricas entre los distintos sectores de la economía, permite extrapolar estas relaciones y explicitar que pasará con el nivel de actividad de los sectores cuando se desea, por ejemplo, duplicar la actividad de uno de ellos. Los problemas de éste tipo son los que responden a nuestro segundo interrogante.

A modo de ejemplo supongamos que el sector que duplica su demanda es la que corresponde a los consumidores finales de modo que que el vector Y aumentará en iguales magnitudes que los aumentos en C.

Recordando:

$$C^{(0)} = \begin{bmatrix} 380 \\ 825 \\ 1035 \end{bmatrix} \qquad Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 490 \\ 1050 \\ 1910 \end{bmatrix}$$

Si $C^{(1)} = C^{(0)} + \Delta C$ la demanda final estara dada por $Y^{(1)} = Y^{(0)} + \Delta C$

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} 760 \\ 1650 \\ 2070 \end{bmatrix} \qquad Y^{(1)} = \begin{bmatrix} 870 \\ 1875 \\ 2945 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la ecuación por el nuevo valor de $Y^{(1)}$ obtenemos el nuevo vector de producción bruta que satisface los nuevos requerimientos de demanda:

$$X^{(1)} = (I - A)^{-1} \; Y^{(1)}$$

$$X^{(1)} = \frac{4000}{1499} \begin{bmatrix} 1463/2000 & 13/150 & 59/1000 \\ 169/600 & 89/180 & 29/600 \\ 517/2000 & 43/300 & 887/2000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 870 \\ 1875 \\ 2945 \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)} = \frac{4000}{1499} \begin{bmatrix} 972.66 \\ 1314.475 \\ 1799.7525 \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 2595.49 \\ 3507.60 \\ 4802.54 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular cuál es la variación del vector X de la manera siguiente:

$$\Delta X = \begin{bmatrix} 2595.49 \\ 3507.60 \\ 4802.54 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1500 \\ 2000 \\ 3000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1095.49 \\ 1507.6 \\ 1802.54 \end{bmatrix}$$

$\Delta X = X^{(1)} - X^{(0)} \quad \Rightarrow$

Es importante notar la falta de proporcionalidad entre el incremento de demanda final Δ Y y el incremento de producción bruta Δ X correspondiente

a ese mismo sector. Esto se debe a la complejidad de las interrelaciones entre sectores, que determinan efectos indirectos relativamente importantes.

CÓMPUTO DE LA INVERSA DE LEONTIEF POR APROXIMACIÓN

Como se mostró en el ejemplo anterior es de vital importancia para obtener la planificación de la economía, el cálculo de la inversa de una matriz. Cuando se trabaja con tamaños pequeños de estas matrices resulta relativamente sencillo obtener tal inversa, sin embargo en un modelo real que represente a una verdadera economía de un país el tamaño de la misma debe ser lo suficientemente grande para capturar con mayor fidelidad el comportamiento de la misma (como el caso de la matriz de insumo–producto de Argentina para el año 1997 con 72 sectores). Ante tales circunstancias el cálculo de la inversa suele ser una tarea mas que complicada no solo para un operador humano si hasta un computador en cuanto al tiempo en que insumiría tal labor. Es por ello que se hace más que necesario de contar con una forma alternativa de cálculo a los efectos de ahorrar tiempo y simplificar las operaciones de cómputo aunque en este proceso se pierda cierta precisión. El objetivo de este ejercicio es mostrar la simplificación de cómputos a la hora de invertir tales matrices remarcando cuna precisas pueden llegar a ser tales procedimientos.

Un método alternativo que permite resolver este problema es el conocido como método de aproximación de la inversa por desarrollo en serie y establece como fórmula de aproximación la siguiente relación:

$$[I - A]^{-1} \cong I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^M$$

Como se aprecia, el cálculo de la inversa según este método se reduce a computar las potencias sucesivas de la matriz de coeficientes hasta un orden (M) dado por el nivel de precisión deseado y sumarlas junto a la matriz identidad. Para demostrar que esta aproximación es lo suficientemente precisa, partiremos de la propiedad de las matrices, según la cual la multiplicación de una matriz B por su inversa da como resultado una matriz identidad del mismo orden de B. Por lo tanto:

$$\mathbf{[I - A][I - A]^{-1} = I}$$

Si nuestra aproximación es correcta, se debe confirmar que:

$$\mathbf{[I - A]\left[I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^M\right] \cong I}$$

Desarrollando el lado izquierdo de la anterior expresión, se tiene:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{I} - \mathbf{A}]\left[\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + ... + \mathbf{A}^M\right] &= \left[\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + ... + \mathbf{A}^M\right] - \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + ... + \mathbf{A}^M\right] \\
&= \left[\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + ... + \mathbf{A}^M\right] - \left[\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + ... + \mathbf{A}^{M+1}\right] \\
&= \left[\mathbf{I} - \mathbf{A}^{M+1}\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si A^{M-1} fuera la matriz nula, la aproximación sería exacta. Falta establecer bajo que condiciones dicha matriz se acerca a la matriz nula.

Se puede demostrar que si todos los elementos de cada columna de **A** son números no negativos que suman menos que 1 (como en cualquier modelo de insumo-producto), se puede aproximar a A^N a la matriz nula si se toma un valor de N lo suficientemente elevado. Por lo tanto la aproximación propuesta al comienzo de este apartado es correcta.

Pero todavía resta demostrar lo establecido al comienzo del párrafo anterior. La norma de una matriz (N(**C**)) será la mayor de las sumas de las columnas de dicha matriz **C**. Dadas las características de la matriz de coeficientes técnicos **A**, su norma no puede ser mayor a 1 ni menor a 0, y ningún elemento de la matriz puede ser superior al valor de la norma:

$$0 < N(\mathbf{A}) < 1 \qquad a_{ij} \leq N(\mathbf{A})$$

Existe un teorema que establece que dada dos matrices **A** y **B**, la norma de la matriz AB no puede ser mayor que el producto de N(**A**) y N(**B**):

$$N(\mathbf{AB}) \leq N(\mathbf{A})N(\mathbf{B})$$

Donde en el caso especial que **A**=**B**, se da:

$$N(\mathbf{A}^2) \leq [N(\mathbf{A})]^2$$

Y cuando $\mathbf{B}=\mathbf{A}^2$

$$N(\mathbf{A}^3) \leq N(\mathbf{A})N(\mathbf{A}^2) \leq N(\mathbf{A})[N(A)]^2 = [N(\mathbf{A})]^3$$

Generalizando estos resultados, logramos:

$$N(\mathbf{A}^M) \leq [N(\mathbf{A})]^M$$

Es aquí, donde el echo de que 0<N(**A**)<1 garantiza que cuando M tiende a infinito $[N(\mathbf{A})]^M$ tenderá a cero. Por lo tanto $N(\mathbf{A}^M)$ también tenderá a cero (ya que es menor o igual a $[N(\mathbf{A})]^M$). Como ningún elemento de la matriz $\mathbf{A}^M$ puede ser superior a $N(\mathbf{A}^M)$, la matriz $\mathbf{A}^M$ debe tender a 0, si hacemos a M lo suficientemente grande.

RESOLUCIÓN DEL EJERCICIO

La matriz propuesta en este ejercicio es:

$$\begin{pmatrix} 0.10 & 0.05 & 0.00 & 0.00 \\ 0.40 & 0.60 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.40 & 0.50 \\ 0.00 & 0.00 & 0.30 & 0.25 \end{pmatrix}$$

La sumatoria de los elementos de una misma columna da como resultados: 0.60, 0.65, 0.70 y 0.75, por lo que claramente se observa que es un modelo de economía abierta, con un sector familia de naturaleza exógena.

A continuación se procedea presentar la implementación de este algoritmo en distintos Softwares:

GAUSS 4.0

A continuación se presenta el programa utilizado. Dicho programa proporciona: la matriz exacta inversa de Leontief ($(I-A)^{-1}$), la aproximación de esta a través del método por desarrollo en serie, el exponente M al que está elevada la última matriz del desarrollo en serie, la matriz A^{M+1} que debe ser una aproximación de la matriz nula, las raíces y los vectores característicos, y por último la raíz característica máxima y su vector característico.

```
/* Programa para calcular la inversa de Leontief por el metodo
de aproximacion en serie y su comparacion */

output file=leon2.txt on;
load a[4,4]=c:\windows\escritorio\final\ejer5\leon.txt;
cls;
n=rows(a);

/* Obtención de la inversa de Leontief mediante el comando para
invertir matrices */

invexact=inv((eye(n)-a));
"Inversa exacta de la Matriz de Leontief";?;
invexact;
acum=eye(n)+a;

/* Cómputo de la inversa de Leontief por desarrollo en serie */

Sum=eye(n)+a;
aa=a;?;
potencia=1;
do until maxc(sumc(aa))<1e-10;
aa=aa*a;
Sum=Sum+aa;
potencia=potencia+1;
endo;
?; "Potencia:" potencia;
?; " Aproximación lograda a la matriz nula:"; ?; aa;
```

```
?; "Matriz inversa de Leontief aproximada por desarrollo en
serie):"; Sum;


/* Cálculo de las raíces características de la matriz A y del
vector característico asociado a la mayor raíz característica */

{valorp,vectorp}=eigv(a);
?;"Raíces Características:"; valorp;?;
?;"Vectores Característicos:"; vectorp;
valorpmax=maxc(abs(valorp));
?;"Mayor Raíz Característica:" valorpmax;
indice=indexcat(valorp,valorpmax);
vectorpmax=vecp[.,indice];
?;"Vector Característico asociado a la mayor Raíz
Característica:"; vectorpmax;
```

Las salidas del programa para la matriz del ejercicio son:

```
Inversa exacta de Matriz de Leontief

       1.1764706       0.14705882       0.00000000
0.00000000
       1.1764706        2.6470588       0.00000000
0.00000000
      0.00000000       0.00000000        2.5000000
1.6666667
      0.00000000       0.00000000        1.0000000
2.0000000

Matriz inversa de Leontief aproximada por desarrollo en serie

       1.1764706       0.14705882       0.00000000
0.00000000
       1.1764706        2.6470588       0.00000000
0.00000000
      0.00000000       0.00000000        2.5000000      1.6666667
      0.00000000       0.00000000        1.0000000      2.0000000

Potencia :        61.000000



Aproximación lograda a la matriz nula:

  4.7632196e-014   6.3973390e-014       0.00000000
0.00000000
  5.1178712e-013   6.8736609e-013       0.00000000
0.00000000
      0.00000000       0.00000000   8.1324282e-010   8.6608556e-
010
      0.00000000       0.00000000   5.1965134e-010   5.5341715e-
010
Raíces características

     0.062771868
```

```
      0.63722813
      0.71949335
    -0.069493346
Vectores Característicos:

   -0.24577835      -0.088533864      0.00000000      0.00000000
   0.18299738       -0.95125765       0.00000000      0.00000000
   0.00000000        0.00000000       0.84265887     -0.75205314
   0.00000000        0.00000000       0.53844780      0.70616789

Mayor Raíz Característica:      0.71949335

Vector Característico asociado a la mayor Raíz Característica:

      0.00000000
      0.00000000
      0.84265887
      0.53844780
```

Se comenta además que el mismo programa fue probado con la matriz de insumo producto de argentina (72 sectores) resultando una gran performance para el programa y el algoritmo en cuanto tiempo insumido (28.2 seg.) y precisión alcanzada.

MATLAB 5.3

A continuación se exponen las programaciones efectuadas en este programa a los efectos de visualizar como implementar el algoritmo en este lenguaje.

```
a=[0.1 0.5 0 0;0.4 0.6 0 0;0 0 0.4 0.5;0 0 0.3 0.25];
b=a;
m=2;
while max(sum(a^m))>0.0000001
   w = b+a^m;
   b=w;
   m=m+1;
end
Inversa_aproximada=eye(rows(a),rows(a))+ b
Numero_de_iteraciones=m
Inversa_exacta=inv(eye(rows(a),rows(a))-a)
Error=Inversa_exacta-Inversa_aproximada
[v,V]=eig(a);
Valores_propios=eig(a)
Vectores_propios=v
```

```
Inversa_aproximada =

  Columns 1 through 3

       1.176470588206      0.147058823490072                      0
     1.17647058792058       2.64705882310673                      0
                    0                      0       2.49999984935467
                    0                      0      0.999999903739636

  Column 4

                    0
                    0
     1.66666650623273
     1.99999989748485


Numero_de_iteraciones =

    50


Inversa_exacta =

  Columns 1 through 3

     1.17647058823529      0.147058823529412                      0
     1.17647058823529       2.64705882352941                      0
                    0                      0                    2.5
                    0                      0                      1

  Column 4

                    0
                    0
     1.66666666666667
                    2


Error =

  Columns 1 through 3

  2.92905699694757e-011   3.93392818320848e-011                      0
  3.14714254656678e-010    4.2268366584608e-010                      0
                    0                      0     1.506453344291e-007
                    0                      0    9.6260364346179e-008

  Column 4

                    0
                    0
  1.60433939466742e-007
  1.02515152367033e-007
```

```
Valores_Propios =

      0.0627718676730985
       0.637228132326901
       0.719493345951488
     -0.0694933459514875


Vectores_propios =

  Columns 1 through 3

      -0.802088525395521        0.0926698391403414                        0
       0.597205155226274          0.995696892088                     0
                       0                       0         0.842658866399145
                       0                       0           0.5384478014431

  Column 4

                       0
                       0
      -0.728996206328382
       0.684517736190106
```

MATHEMATICA 4.0

```
In[34]:= a = {{1 / 10, 5 / 100, 0, 0},
           {40 / 100, 60 / 100, 0, 0},
           {0, 0, 40 / 100, 50 / 100},
           {0, 0, 30 / 100, 25 / 100}};
         n = 70;
         For[i = 1;
          {b = a, g = IdentityMatrix[Length[a]] + a},
          i < (n), i++, {b = b.a, g = g + b}]
         Print["Inversa aproximada"]
         N[g, 70]
         Print["Inversa Exacta"]
         T = N[Inverse[IdentityMatrix[Length[a]] - a],
           70]
         Print["Error"]
         N[T - g, 70]
         Print["Mayor Valor propio"]
         N[Max[Eigenvalues[a]], 70]
         mayor =
          Position[Eigenvalues[a],
            Max[Eigenvalues[a]]][[1]];
         Print[
          "Vector Propio asociado al mayor valor
            propio"]
         N[Eigenvectors[a][[mayor]], 70]
```

```
Inversa aproximada
Out[38]= {{1.176470588235291842960963728432842339237\
            37786494832820715649191317810 7,
           0.147058823529408709642476108163085353529\
            4930215326843878395582179978327, 0, 0},
          {1.176470588235269677139808865304682828235\
            9441722614751027164657439826 61,
           2.647058823529378939385724810063695874532\
            3080802751720855520740931564 34, 0, 0},
          {0, 0,
           2.499999999850197829579340293959690863657\
            62120632983558332006433673047 3,
           1.666666666507130677805028268709101192209\
            3679437219641916207894763677 56}, {0, 0,
           0.999999999904278406683016961225460715325\
            6207662331785149724736858206539,
           1.999999999898058626237831813346960505994\
            8108232132463258338274938201 46}}
Inversa Exacta
```

```
Out[40]= {{1.176470588235294117647058823529411764705\
           882352941176470588235294117647,
          0.147058823529411764705882352941176470588\
           235294117647058823529411764705 9, 0, 0},
         {1.176470588235294117647058823529411764705\
           882352941176470588235294117647,
          2.647058823529411764705882352941176470588\
           235294117647058823529411764706, 0, 0},
         {0, 0,
          2.500000000000000000000000000000000000000\
           000000000000000000000000000000,
          1.666666666666666666666666666666666666666\
           666666666666666666666666666667}, {0, 0,
          1.000000000000000000000000000000000000000\
           0000000000000000000000000000000,
          2.000000000000000000000000000000000000000\
           0000000000000000000000000000000}}
Error
Out[42]= {{2.274686095095096569425468504487992848263\
            431743380939540 × 10^-15,
          3.055063406244778091117058742272584962670\
            983971193766873 2 × 10^-15, 0, 0},
         {2.444050724995822472893646993818067970136\
            787176955013498 6 × 10^-14,
          3.282532015754287748059605592721384247497\
            327145531860827 2 × 10^-14, 0, 0}, {0, 0,
          1.498021704206597060403091363423787936701\
            6441667993566326952 7 × 10^-10,
          1.595359888616383979575654744572987229447\
            024750458771902989 10 × 10^-10}, {0, 0,
          9.572159331698303877453928467437923376682\
            148502752631417934 6 × 10^-11,
          1.019413737621681866530394940051891767867\
            536741661725061798 54 × 10^-10}}
Mayor Valor propio
Out[44]= 0.719493345951487501132207357248558531523 55\
         5649165889786296125338642812 6
Vector Propio asociado al mayor valor propio
Out[47]= {{0, 0,
          1.564977819838291670440691190828528438411\
           852163886299287653751128809375,
          1.000000000000000000000000000000000000000\
           0000000000000000000000000000000}}
```

MAPLE 6.0

INVERSA DE LEONTIEF

Procedimiento

```
> NumInv:=proc(A,n)
evalm(Matrix(nops(a),nops(a),shape=identity)+ evalm(sum(evalm(A^i), i=1..n)));
end;
```

$NumInv :=$
$\mathbf{proc}(A, n)\ \mathrm{evalm}(\mathrm{Matrix}(\mathrm{nops}(a), \mathrm{nops}(a), shape = identity) + \mathrm{evalm}(\mathrm{sum}(\mathrm{evalm}(A\char`^i), i = 1 .. n)))\ \mathbf{end\ proc}$

Ejemplos

```
with(linalg):
a:=[[1/10, 5/100,0,0],[4/10 ,6/10,0,0],[0,0,4/10,5/10],[0,0,3/10,25/100]];
Aprox:=evalf(NumInv(a,70),50);
Exact:=evalf(linalg[inverse](Matrix(nops(a),nops(a),shape=identity)-a),50);
Error:=evalf(evalm(Exact-Aprox),50);
v := evalf([eigenvectors(a)],50);
```

$$a := \left[\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, 0, 0\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right], \left[0, 0, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right], \left[0, 0, \frac{3}{10}, \frac{1}{4}\right]\right]$$

$Aprox :=$
[1.1764705882352918429609637284328423392373778649483 ,
.14705882352940870964247610816308535352949302153268 , 0. , 0.]
[1.1764705882352696771398088653046828282359441722615 ,
2.6470588235293789393857248100636958745323080802752 , 0. , 0.]
[0. , 0. , 2.4999999998501978295793402939596908636576212063298 ,
1.6666666665071306778050282687091011922093679437220]
[0. , 0. , .99999999990427840668301696122546071532562076623318 ,
1.9999999998980586262378318133469605059948108232132]

$Exact :=$
[1.1764705882352941176470588235294117647058823529412 ,
.14705882352941176470588235294117647058823529411765 , 0. , 0.]
[1.1764705882352941176470588235294117647058823529412 ,
2.6470588235294117647058823529411764705882352941176 , 0. , 0.]

[0. , 0. , 2.500000000000000000000000000000000000000000000 ,
1.666666666666666666666666666666666666666666667]
[0. , 0. , 1. , 2.]

Error :=
[.2274686095095096569425468504487992 9 10^{-14} , .30550634062447780911170587422725849 7 10^{-14} , 0. ,
0.]
[.24440507249958224728936469938180679 7 10^{-13} , .32825320157542877480596055927213842 4 10^{-13} , 0. ,
0.]
[0. , 0. , .14980217042065970604030913634237879367 02 10^{-9} ,
.15953598886163839795756547445729872294 47 10^{-9}]
[0. , 0. , .95721593316983038774539284674379233766 82 10^{-10} ,
.10194137376216818665303949400518917678 68 10^{-9}]

v := [[.7194933459514875011322073572485585315235556491659 0, 1.,
{[0., 0., 1.5649778198382916704406911908285284384118521638863, 1.]}], [
-.069493345951487501132207357248558531523555649165 90, 1.,
{[0., 0., -1.0649778198382916704406911908285284384118521638863, 1.]}], [
.63722813232690143299253057341094646591101322289914, 1.,
{[.093070330817253582481326433527366164777533057247 85, 1., 0., 0.]}], [
.06277186767309856700746942658905353408898677710086, 1.,
{[-1.3430703308172535824813264335273661647775330572478, 1., 0., 0.]}]]

Se puede observar entonces la implementación del algoritmo de aproximación de la matriz inversa en diversos lenguajes de programación resaltando la ganancia de velocidad a la hora de realizar los cómputos pertinentes. Obsérvese además la ventaja Mathematica y Maple en cuanto a precisión sobre Gauss y Matlab y la ventaja de éstos últimos en cuanto a velocidad y esfuerzo de cálculos

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LOS VALORES Y VECTORE PROPIOS

Por último, resta hacer un comentario sobre las raíces características de la matriz A. Si se considera la igualdad:

$$AX = \lambda X$$

Donde λ es una raíz característica de la matriz A y X es el vector propio asociado a dicha raíz característica. Recordando que AX+D=X y reemplazando, vemos que:

$$X = \lambda X + Y$$
$$X(1-\lambda) = Y$$
$$X = \frac{Y}{1-\lambda}$$

Por lo tanto, dado una raíz característica con su vector característico asociado podemos obtener una demanda final compatible con el modelo.