Simulaciones a través de Gauss, Matlab y Macros en Excel

Jorge Mauricio Oviedo [1]

Resumen: El presente trabajo tiene por objetivo brindar un enfoque teórico accesible sobre y su implementación diversos Softwares. Para llevar a cabo dicha tarea se presenta un ejercicio de simulación y se procede a implementarlo en todo tipo de software tanto algebraico y numérico. Se exponen y se comparan alternativamente las resoluciones numéricas contra las algebraicas evaluando la eficiencia en cada programa. Se proveen además los códigos de programación usados en cada Software.

Palabras clave: Simulación, Ruina del Jugador, Matlab, Gauss, Excel, Macros, Visual Basic

[1] joviedo@eco.unc.edu.ar

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

En el problema de la ruina del jugador, se plantea un juego en que participan dos jugadores, *A* y *B*, y cada uno de los jugadores cuenta con un capital inicial, *KA* y *KB*. El juego consiste en tirar una moneda y, dependiendo del resultado, uno de los jugadores debe dar al otro una determinada suma de dinero (dada por el monto de la apuesta). El juego continúa hasta que uno de los jugadores se queda sin dinero (queda en la ruina), por lo cual se concluye la jugada y éste pierde. Evidentemente es un juego de suma cero en el sentido de lo que uno gana el otro lo pierde de modo que en todo momento la suma de los capitales poseídos por ambos jugadores es una constante del juego *W=KA+KB*.

Algunas generalizaciones del juego alcanzan a contemplar el caso de más de dos jugadores, la situación no es tan simple, ya que es necesario redefinir la regla de finalización del juego. Las opciones son en cuanto a que número de jugadores debe quedar en la ruina para que finalice el juego.

Por otro lado las generalizaciones se extienden para contemplar las siguientes variantes:

- juego igualmente favorable: las probabilidades de ganar o perder la apuesta son las mismas (las funciones de densidad son simétricas) para cada jugador. Dentro de este caso se puede incluir como variante particular la situación en que ambos capitales son iguales con lo que el juego resultaría ser simétrico.

- juego que favorece a un jugador: las probabilidades de ganar o perder la apuesta en una vuelta no son las mismas.

A continuación se observará el juego desde la perspectiva del jugador A, suponiendo por simplicidad expositiva que el monto de la apuesta es 1 y que en cada vuelta solo poseen dos resultados posibles, éxito y fracaso. Cada uno de dichos estados posee una probabilidad asociada, P(E) y P(F) respectivamente. Dicha probabilidad está dada por la naturaleza del evento aleatorio y es independiente de lo que haya ocurrido en las vueltas previas.

Pero dichas probabilidades solo son las relevantes en juegos donde solo se realicen una primera vuelta y termina el juego. Si el juego supera la primera vuelta, se vuelve relevante las probabilidades de éxito en la segunda rueda, la cual está condicionada al evento que ocurrió en la primera rueda.

$$P(E\,2^{da}\,rueda) = P(E)P(E\,2^{da}\,rueda\,/\,E\,1^{ra}\,rueda) + P(F)P(E\,2^{da}\,rueda\,/\,F\,2^{ra}\,rueda)$$

Aquí vemos claramente cual es la naturaleza del juego para cada una de las rondas. Es esta la estructura probabilística de las sucesivas rondas y sería la estructura relevante si el jugador se pudiera retirar en cualquier momento del juego, llevándose sus ganancias o sufriendo sus pérdidas. Pero esta no es una alternativa posible en la "ruina del jugador", sino que debe permanecer en el juego hasta quedarse en la ruina o hasta que su oponente quede en la ruina. Dada esta particularidad del juego, los únicos resultados posibles son que el capital final del jugador A sea W ó 0. Definiendo a $\alpha(K_A)$ como la probabilidad de que el capital final del jugador A sea W antes de que llegue a 0, dado que su capital inicial es K_A.

Por lo tanto, al iniciar el juego en la primera ronda, la probabilidad relevante para el jugador a es $\alpha(K_A)$. En la segunda ronda, el fenómeno relevante es el mismo, pero ha cambiado el capital inicial del jugador (dependiendo si ganó (incremento de su capital en \$1) o perdió (disminución de su capital en \$1) en la ronda anterior). Dicha probabilidad puede ser expresada como:

$$\alpha(K_A) = P(E)x\alpha(K_A / E\, 1^{ra}\, rueda) + P(F)x\alpha(K_A / F\, 1^{ra}\, rueda)$$

Donde en el segundo miembro tenemos dos probabilidades condicionadas al evento sucedido en la primera ronda. Dado que el éxito en la primera ronda implica que ha aumentado en una unidad el capital del jugador a y que el fracaso implica una disminución en una unidad, tenemos que:

$$\alpha(K_A / E\, 1^{ra}\, rueda) = \alpha(K_A + 1)$$
$$\alpha(K_A / F\, 1^{ra}\, rueda) = \alpha(K_A - 1)$$

$$\alpha(K_A) = P(E)x\alpha(K_A + 1) + P(F)x\alpha(K_A - 1)$$

Si se hace variar K_A desde 0 hasta *W-1* utilizando la expresión anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\alpha(K_A = 0) = 0 \\
&\alpha(K_A = 1) = P(E)x\alpha(K_A = 2) \\
&\alpha(K_A = 2) = P(E)x\alpha(K_A = 3) + P(F)x\alpha(K_A = 1) \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&\alpha(K_A = W-1) = P(E)x\alpha(K_A = W) + P(F)x\alpha(K_A = W-2) = P(E) + P(F)x\alpha(K_A = W-2) \\
&\alpha(K_A = W) = 1
\end{aligned}$$

Operando:

$$\begin{aligned}
&\alpha(K_A = 0) = 0 \\
&\alpha(K_A = 2) - \alpha(K_A = 1) = \left[P(F)/P(E)\right]\alpha(K_A = 1) \\
&\alpha(K_A = 3) - \alpha(K_A = 2) = \left[P(F)/P(E)\right]^2 \alpha(K_A = 1) \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&\alpha(K_A = W) - \alpha(K_A = W-1) = 1 - \alpha(K_A = W-1) = \left[P(F)/P(E)\right]^{W-1} \alpha(K_A = 1)
\end{aligned}$$

Donde la sumatoria en columnas de ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$1 - \alpha(K_A = 1) = \alpha(K_A = 1)\sum_{i=1}^{W-1} \left[P(F)/P(E)\right]^i$$

Cuando el juego es igualmente favorable (*P(E)=P(F)*), los resultados anteriores se simplifican y obtenemos:

$$\alpha(K_A = 1) = \frac{1}{W}$$

$$\alpha(K_A = 2) - \frac{1}{W} = \frac{1}{W} \quad \Rightarrow \alpha(K_A = 2) = \frac{2}{W}$$

$$\vdots$$

$$\alpha(K_A = W - 1) = \frac{W - 1}{W} \quad \Rightarrow \alpha(K_A) = \frac{K_A}{W}$$

El resultado final es que la probabilidad que el jugador gane la partida depende de los capitales iniciales de ambos jugadores, en especial de las diferencias relativas entre ellas. Ello se ve claramente si transformamos la expresión anterior en:

$$\alpha(K_A) = \frac{K_A}{K_A + K_B} = (1 + \frac{K_B}{K_A})^{-1}$$

RESOLUCIÓN DEL EJERCICIO

El ejercicio 6 plantea un juego de ruina del jugador en el cual KA= 3, KB= 2 y el valor de la apuesta es 1. Además, se supone que P(E) = P(F) = 0.5.

La simulación del juego se realizó utilizando dos programas numéricos de alta velocidad en los cálculos: el programa Gauss Light 4.0 y el programa Matlab 5.3. Dada la necesidad de contar con Softwares de gran velocidad en los cálculos se optó por dejar afuera de la implementación de este ejercicio a los programas simbólicos Mathematica y Maple dado al enorme insumo de tiempo que estas operaciones de simulación les llevarían.
En los mismos se repitió el juego 10000 veces con el objeto de determinar la duración media del juego, es decir, cuántas vueltas (en promedio) deben jugar los jugadores para terminar el juego. Nótese que el número mínimo de vueltas de un juego debe ser necesariamente dos, en cuyo caso ganará el jugador A; asimismo, la cantidad mínima de veces necesaria para que resulte triunfador el jugador B será de tres. Estos resultados relativamente sencillos pueden extenderse al caso de apuesta no unitaria por lo que las expresiones para la duración mínima será:

$$D_{\min} = Min\,(\frac{K_A}{bet}, \frac{K_B}{bet})$$

En cuanto a la duración media, está dada por:

$$D_{me} = \frac{K_A}{bet} x \frac{K_B}{bet} \qquad (1)$$

GAUSS LIGHT 4.0

En el programa, el proceso aleatorio de tirar la moneda se simula mediante la generación de números aleatorios que poseen una distribución uniforme (0,1) utilizando el comando `rndu`. Si el número aleatorio generado es menor a 0,5, se asocia con el estado de la naturaleza éxito, mientras que si 4es mayor a 0,5 se lo asocia al estado de la naturaleza fracaso.

El programa utilizado[2] fue:

```
/* Programa para simular la ruina del jugador */
cls;
caa=3;
cab=2;
nrep=10000;
apu=1;
duracum={};
ganad=0;
nre=0;
do while nre<nrep; /* Bucle para repetir el juego 10000 veces */
dur=0;
capa=caa;
capb=cab;
do while (capa*capb)>0; /* Rutina de juego */
jug=rndu(1,1);
if jug<0.5;
capa=capa+apu;
capb=capb-apu;
else;
capa=capa-apu;
capb=capb+apu;
endif;
dur=dur+1;
endo;
if capa>0;
ganad=ganad+1;
endif;
nre=nre+1;
duracum=duracum|dur;
endo;
durmed=meanc(duracum); /* Duración media del juego */
"____________________________________________________";?
;
" Simulación de la ruina del jugador ";
"____________________________________________________";?
;
"Capital inicial de A:" caa;
"Capital inicial de B:" cab;
"Valor de la apuesta: " apu;
"_____________________________________________________";?
;
"Cant. partidas: " nrep;
"Duración media: " durmed;
"Duración máxima:" maxc(duracum);
"Duración mínima:" minc(duracum);
"Cantidad de partidas ganadas por el jugador A:" ganad;
```

[2] El comando for produce ganancias de tiempo con respecto a do while y/o do until.

```
"___________________________________________________________";
```

El Programa se ha escrito con la suficiente generalidad para permitir cambiar el valor de los capitales iniciales, el monto de la apuesta y el número de repeticiones. Dicha generalidad permitirá efectuar análisis de sensibilidad en las secciones siguientes para ver como las mismas influyen en la duración media del juego.

```
________________________________________________________________

 Simulación de la ruina del jugador
________________________________________________________________

Capital inicial de A:       3.0000000
Capital inicial de B:       2.0000000
Valor de la apuesta:        1.0000000
________________________________________________________________

Cant. partidas:        10000.000
Duración media:        6.0466000
Duración máxima:       64.000000
Duración mínima:       2.0000000
Cantidad de partidas ganadas por el jugador A:       5982.0000
________________________________________________________________
```

IMPLEMENTACIÓN EN MATLAB 5.3

A continuación se exponen los comandos en donde se escribió el mismo programa para simular el juego de la ruina del jugador. Las denominaciones de las variables y parámetros coinciden con las expuestas en los comandos de Gauss a los efectos de que las diferencias en el programa surjan únicamente de la diferencia de comandos. La ventaja de Matlab sobre Gauss Light radica que el primero no tiene la restricción de 10000 repeticiones como máximo número admisible de repeticiones justamente porque no es una versión Light sino una full. Esta ventaja no existe en las versiones de Gauss para DOS. Por otro lado, una ventaja de Gauss LIGHT sobre Matlab es su menor insumo de tiempo en la ejecución de tales programas resultando: 3.5 seg. para Gauss mientras que Matlab utilizo 11.9 seg., es decir Gauss Light para este tipo de simulaciones es más de tres veces más rápido que Matlab.

```
% Programa para simular la ruina del jugador %
caa=3;
cab=2;
nrep=10000;
apu=1;
duracum=[];
ganad=0;
nre=0;
while nre<nrep % Bucle para repetir el juego 10000 veces %
dur=0;
capa=caa;
capb=cab;
while (capa*capb)>0 % Rutina de juego %
jug=rand(1,1);
if jug<0.5
capa=capa+apu;
capb=capb-apu;
else
capa=capa-apu;
capb=capb+apu;
end
dur=dur+1;
end
if capa>0
ganad=ganad+1;
end
nre=nre+1;
duracum=[duracum;dur];
end
durmed=mean(duracum); % Duración media del juego %
disp('=============================================================')
disp('           Simulación de la ruina del jugador                ')
disp('=============================================================')
disp('                                                             ')
disp('Capital inicial de A:')
disp(caa)
disp('Capital inicial de B:')
disp(cab)
disp('Valor de la apuesta:')
disp(apu)
disp('_____________________________________________________________')
disp('                                                             ')
disp('Cant. partidas:')
disp(nrep)
disp('Duración media:')
disp(durmed)
disp('Duración máxima:')
disp(max(duracum))
disp('Duración mínima:')
disp(min(duracum))
disp('Cantidad de partidas ganadas por el jugador A:')
disp(ganad)
disp('_____________________________________________________________')
```

```
================================================================

            Simulación de la ruina del jugador

================================================================

   Capital inicial de A:
        3

   Capital inicial de B:
        2

   Valor de la apuesta:
        1
```

```
   Cant. partidas:
          10000

   Duración media:
                       5.9519

   Duración máxima:
       44

   Duración mínima:
        2

   Cantidad de partidas ganadas por el jugador A:
           5935
```

ANÁLISIS DETALLADO SOBRE LA DURACIÓN DEL JUEGO

En la presente sección se pretende analizar con mayor profundidad las cuestiones relacionadas con la duración del juego. A tales efectos se preveen efectuar análisis de sensibilidad con respecto a los valores de los capitales iniciales y los montos de las apuestas. En todos los casos se mantendrá constante el número de repeticiones en 10000 y las probabilidades asociadas de éxito y fracaso.

Sensibilidad de los resultados ante modificaciones de los capitales iniciales

En párrafos anteriores se estableció que la duración promedio del juego venía dada por:

$$D_{me} = \frac{K_A}{bet} x \frac{K_B}{bet}$$

mientras que la probabilidad de que el jugador gane el juego era:

$$\alpha(K_A) = \frac{K_A}{K_A + K_B}$$

En este apartado se mostrará mediante programas simuladores escritos anteriormente como dichos valores (duración media y probabilidad de ganar) son sensibles a los valores iniciales de los capitales). A tales propósitos se correrán los programas anteriores para una apuesta de un peso y 10000 repeticiones haciendo variar los montos iniciales de capitales. Los resultados obtenidos se condensan en la siguiente tabla:

ANÁLISIS DE SENCIBILIDAD PARA LOS CAPITALES INICIALES			Capitales Iniciales			
			K_A=3 y K_B=2	K_A=4 y K_B=2	K_A=5 y K_B=3	K_A=4 y K_B=4
α(K_A,K_B)	Valores simulados	Gauss	0,6066	0,6717	0,6223	0,4945
		Matlab	0.5903	0,6698	0.6290	0.5093
	K_A / W	Valor teórico	0,6	0,6667	0,625	0,5
Duración Media	Valores simulados	Gauss	5.9598	8,0107	14,8756	16,0571
		Matlab	6,0147	7,9636	14,9734	16,0250
	K_A x K_B	Valor Teórico	6	8	15	16
Duración Mediana	Valores simulados	Gauss	4	6	12	12
		Matlab	4	6	12	12

Claramente si observan la dependencia de la duración media con respecto a los capitales iniciales y de la probabilidad de ganar como también así su proximidad a los valores teóricos dados por las fórmulas anteriores.

Vales destacar como en todos los casos la mediana de la distribución de la duración se encuentra por detrás del valor medio. Esta es una advertencia importante en cuanto a interpretaciones pues existirá siempre una probabilidad de 50% de que el partido acabe entre valores comprendidos entre el mínimo y la mediana y no el valor medio. Asimismo se desprende de esta observación de que la función de distribución de frecuencia tiene un sesgo natural hacia valores bajos.

Sensibilidad de los resultados ante modificaciones en el monto de la apuesta

A continuación se corrieron nuevamente los programas, manteniendo invariable tanto los capitales iniciales (K_A=3 y K_B=2) y el número de repeticiones (10000), para distintos montos de la apuesta (0,2, 0,25, 0,5, 1).

Se compara los resultados empíricos obtenidos de la duración media del juego y de la probabilidad de ganar la partida del jugador A.

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">ANÁLISIS DE SENCIBILIDAD PARA EL MONTO DE LA APUESTA</th><th colspan="4">Monto de la apuesta</th></tr>
<tr><th>1</th><th>0,5</th><th>0,25</th><th>0,20</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\alpha(K_A,K_B)$</td><td rowspan="2">Valores simulados</td><td>Gauss</td><td>0,5994</td><td>0,5991</td><td>0,5938</td><td>0,4945</td></tr>
<tr><td>Matlab</td><td>0.5903</td><td>0,6028</td><td>0.5903</td><td>0.5995</td></tr>
<tr><td colspan="2">K_A / W Valor teórico</td><td>0,6</td><td>0,6</td><td>0,6</td><td>0,6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Duración Media</td><td rowspan="2">Valores simulados</td><td>Gauss</td><td>5.9664</td><td>24,255</td><td>95,7232</td><td>148,7686</td></tr>
<tr><td>Matlab</td><td>6,0147</td><td>23,9636</td><td>96,9011</td><td>149,0250</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(K_A \times K_B)/ apu^2$ Valor Teórico</td><td>6</td><td>24</td><td>96</td><td>150</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Duración Mediana</td><td rowspan="2">Valores simulados</td><td>Gauss</td><td>4</td><td>18</td><td>72</td><td>125</td></tr>
<tr><td>Matlab</td><td>4</td><td>18</td><td>72</td><td>125</td></tr>
</table>

Los resultados comprueban la dependencia de la duración media del juego al monto de la apuesta y la independencia de la probabilidad de ganar el juego a la variable apu. Nótese además como se refuerzan las conclusiones con respecto a la sesgadez de la distribución de la duración del juego ya que siempre la media supera a la mediana

CONCLUSIONES

Hemos llegado a resultados sorprendentes. Si bien utilizamos un proceso aleatorio (lanzar una moneda) para describir el juego de la ruina, el azar es solo un instrumento y en realidad los resultados obtenidos para la duración media no dependen de la distribución de probabilidades del proceso aleatorio. Ello es algo no trivial, ya que muestra claramente que los resultados obtenidos responden a algún proceso con componentes determinísticas.

¿Qué hay atrás de este tipo de juegos? ¿Cuáles son los misterios que ocultan y que es en realidad lo que muestran? Éstas son cuestiones muy complejas que han cautivado a genios de la talla de Brown, Perrin, Boltzman, Einstein, Barnsley, Haussdorf, etc.

En lo que a mí particularmente me atrae de este tipo de juegos que utilizan el azar y obtienen resultados en alguna medida determinísticos es que simplifican de una manera notable el estudio de ciertos fenómenos que se relacionan con el comportamiento caótico y su representación por medio de fractales.

Los fractales se crean a través de la geometría fractal. Es un nuevo lenguaje (al igual que lo es la geometría clásica) el cual su alfabeto está compuesto por algoritmos que se repiten de forma iterativa y nos proporcionan figuras o estructuras.

La geometría fractal se divide en dos grandes ramas:

La Geometría Fractal Determinística, donde una forma se describe a través de algoritmos determinados, que al iterarlos producen una misma forma a un objeto completamente determinado.

La Geometría Fractal no Determinística, donde los algoritmos que describen las formas u objetos, son probabilísticos, es decir, incluyen variables aleatorias con la finalidad de aproximagerse[3] más al objeto que se desea representar. En estos casos los algoritmos en diferentes iteraciones producen formas que tienen diferencias por ejemplo, la aleatoriedad permite describir ciertos fenómenos naturales (una montaña) se puede introducir una variable aleatoria que describa la altura de las irregularidades de la superficie.

En la definición anterior vemos más claramente cual es el nexo existente entre los juegos semejantes a la ruina del jugador y los fractales. La ruina del jugador es en realidad un algoritmo aleatorio, aunque muy simple para poder ser representado en un plano.

EINSTEIN Y LA CAMINATA AL AZAR[4]

Tal ves sea conveniente presentar el génesis de todos estos procesos que incluyen un elemento de azar para explicar un comportamiento que lleva a resultados determinísticos.

Supongamos que una persona haya bebido de más, regresa a su casa y trata de abrir la puerta del frente con tan poca suerte que tambalea para la derecha o la izquierda, al azar. A veces da un paso a la derecha y a veces un paso a la izquierda, pero es imposible predecir en que dirección se moverá el próximo paso. La cuestión central de este problema es, suponiendo que el borracho da siempre pasos de la misma longitud (ya sea a la derecha o a la izquierda), ¿a que distancia de la puerta se encontrará, en promedio, después de n pasos? Éste parece ser un problema muy simple, ya que la conclusión natural sería que, al ser igual de probables los pasos hacia la derecha como a la izquierda, el borracho terminará en promedio en frente de la puerta.

Pero examinemos un poco más este problema. Es cierto que mientras mayor sea el número de pasos que consideremos, más posible es que el número de pasos a la derecha sea el mismo que a la izquierda. Pero dado un cierto número de pasos, hay más posibilidades de estar lejos de la puerta que frente a ella.

Consideremos el caso en que el borracho ha dado cuatro pasos, las combinaciones posibles de pasos a la derecha (D) y a la izquierda (I) que forman la trayectoria, son:

---

[3] Aproximageción: 1) una estimageción del valor de cualquier cantidad con un grado de precisión deseado. 2) cualquier expresión en forma más simple que es aproximagedamente equivalente a otra expresión dada por ejemplo, una función o sucesión asintótica a una función o sucesión dada.

[4] La presente sección como las siguientes fueron realizadas en forma conjunta con Paulo José Regis.

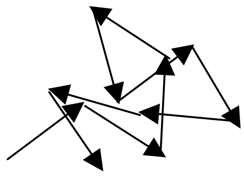
IIII	IDII	DIII	DDII
IIID	IDID	DIID	DDII
IIDI	IDDI	DIDI	DDI
IDII	IDDD	DIDD	DDDD

Dichos resultados se pueden agrupar en:

- hay 6 combinaciones que dan dos pasos a la derecha y dos a la izquierda: el borracho llega a la puerta.
- hay 4 combinaciones que dan 1 paso a la izquierda y 3 a la derecha: el borracho se encuentra a 2 pasos de la puerta.
- hay 4 combinaciones que dan un paso a la derecha y 3 a la izquierda: el borracho termina a dos pasos de la puerta.
- Hay 1 combinación para dar cuatro pasos a la derecha: cuatro pasos de la puerta.
- Hay 1 combinación para dar cuatro pasos a la izquierda: cuatro pasos de la puerta.

De ello podemos concluir que, tomados de forma individual cada una de las posibilidades anteriores, la situación mas probable (6 de 16 veces, o sea un 37,5%) es que termine delante de la puerta. Pero la mayoría de las veces (62,5%) no se encontrará delante de la puerta. Es más, un 50% de las veces, se encontrará a dos pasos de distancia (no sabemos si a la izquierda o la derecha) de la puerta. En este tipo de procesos, el promedio no es un indicador útil, ya que siempre es 0.

Einstein utilizó un modelo unidimensional similar para explicar el movimiento Browniano. El movimiento Browniano fue observado por primera vez por Robert Brown, quien notó que el polen en suspención se movía bajo el microscopio de una forma muy irregular. Recurriendo a un gráfico muy simple:



Estos movimientos son fractales. Si dejáramos actuar al grano de polen un número elevado de veces, la trayectoria forma un fractal. Si magnificáramos una porción del gráfico, veríamos que las características generales del movimiento son las mismas que para la escala mayor. Cabe aclarar que el fractal sería no lineal (no es autosimilar), ya que la porción magnificada no es exactamente igual al dibujo como un todo.

La explicación de Einstein del movimiento Browniano es el precursor del modelo de la caminata del borracho. Las moléculas de agua se mueven al azar y golpean a la partícula en suspención (el grano de polen, por ejemplo) por todos lados. Pero Einstein razonó que las moléculas de agua se mueven al azar en todas las direcciones posibles y solo en un caso excepcional (cuando se compensasen unas con las otras) la partícula no se movería. El caso más común sería que los golpes quedaran desbalanceados y el grano de polen se movería. La trayectoria descrita por el grano de polen, como ya dijimos, es un fractal aleatorio.

Einstein llevó la teoría del movimiento Browniano mucho más lejos y logró predecir cual sería la distancia media a la que se movería un grano típico (dependiendo de su radio, coeficiente de viscosidad temperatura, etc.). El resultado que encontró es que el cuadrado de la distancia que se mueve una partícula en suspensión es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo de observación.

$D^2=2ht$

donde h[5] (llamado coeficiente de proporcionalidad) es un número característico del solvente y soluto donde se encuentre el polen.

Einstein formalizó su modelo simplificando el problema tridimencional a un problema unidimenional, donde se supone que el grano de polen solo se puede mover en una línea hacia la izquierda o hacia la derecha y siempre a una distancia en cada paso. Este modelo es igual al de la caminata aleatoria del borracho ya presentado.

También es fácil de observar la similitud entre éste modelo y el juego de la ruina del jugador. Solo se diferencian en que el juego posee una regla determinada para terminar la partida, mientras en la caminata del azar, el numero de pasos del borracho está predeterminado.

Las fluctuaciones bursátiles también siguen una forma de movimiento browniano. En la caminata del azar pura (que puede ser asociada con los juegos de la ruina igualmente favorables) la probabilidad de dar un paso a la izquierda o a la derecha es siempre ½ y lleva a la ley:

$$D=t^{1/2}$$

Pero en la bolsa puede ocurrir que aparezcan tendencias a la alza o tendencias a la baja (relacionados con los juegos que favorecen a un jugador). En ambos casos, la ley de desplazamiento de un costo inicial de las acciones está dada por:

$$D=t^{H}$$

Donde h es mayor que ½ para las tendencias positivas y menor a ½ para las tendencias negativas

EL JUEGO DEL CAOS

Un fractal puede considerarse el gráfico que representa un algoritmo determinado. Cuando se está en presencia de un fenómeno caótico, puede representarse el comportamiento del algoritmo como un fractal.

El tratamiento tradicional de la teoría del caos consistía generar los fractales iterativamente. El fractal obtenido era en cuestión el resultado de un proceso determinístico bien establecido.

Michael Barnsley tomó un camino diferente: en vez de generar fractales de forma iterativa, él convirtió el azar en el bloque fundamental de los fractales. Esta nueva técnica de generación de fractales la denominó "juego del caos".

Para jugar el juego del caos sólo se necesita en principio una hoja de papel y una moneda. Se elige un punto de partida cualquiera y se inventan dos reglas dependiendo de si sale cara o sello. La regla debe establecer como se coloca un punto después del otro. A modo de ejemplo, dicha regla puede ser del tipo:

+ Mueva dos centímetros al noreste el punto.

+ Mueva 25% más cerca de un punto fijo previamente determinado el punto

Aunque el azar se utiliza como herramienta, se debe tener en cuenta que siempre se finaliza con la misma figura. Por lo tanto, el sistema es determinístico de acuerdo con las reglas.

---

[5] Para la caminata h=1.

El juego de la ruina del jugador podría adaptarse para poder jugar el juego del caos. En cuanto a las reglas a seguir según el evento resulte en cara o seca, podríamos adaptar el juego a un mapa bidimencional. Las reglas asociadas a los eventos éxito y fracaso en cada ronda se en pasos de un algoritmo aleatorio:

+ Éxito: mover el punto inicial un centímetro a la izquierda y un centímetro arriba
+ Fracaso: mover el punto inicial un centímetro luego de girar en un ángulo de 30 grados.

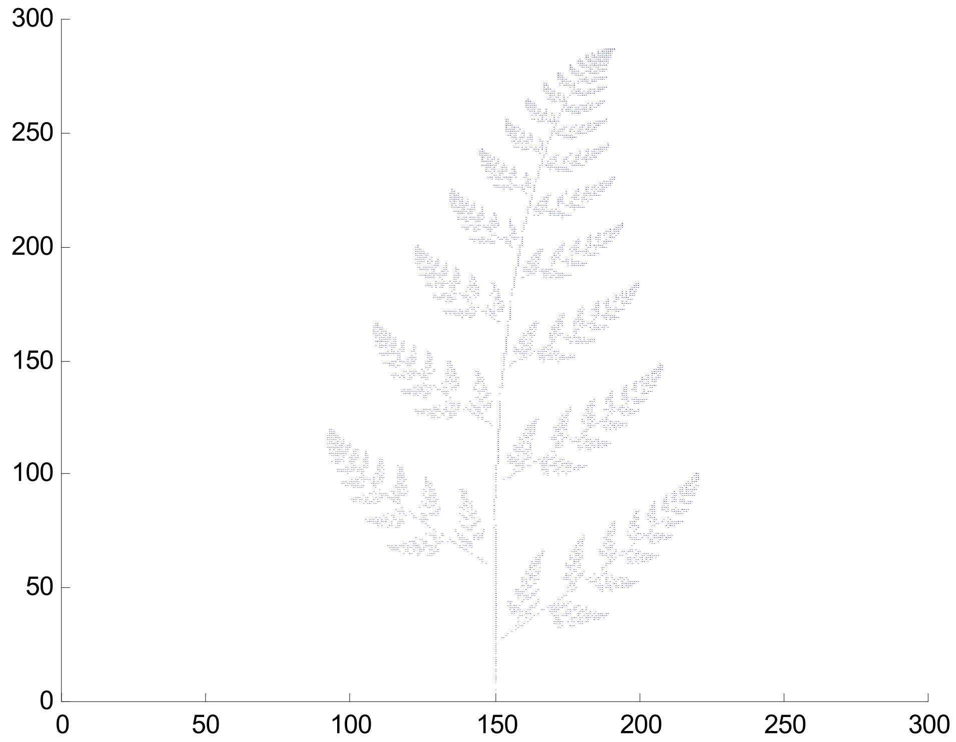
Cuando uno crea un fractal con medios computacionales, un concepto clave del mismo es la profundidad que se le da. Los fractales deberían poseer una profundidad infinita, pero resulta imposible representar un fractal de esa manera y lo que se logra es una aproximación del mismo. Dicha aproximación es tan buena como la profundidad que se utiliza para crearlo.

Repetiremos a continuación un juego (o algoritmo aleatorio) más interesante. En el siguiente juego, se sigue utilizando el azar como herramienta, pero ya no hay solo dos resultados posibles, sino 4.

```
clear all
figure
axis([0 300 0 300])
hold
imax=10000;
w=300;
e1=0.5*w;
e2=0.57*w;
e3=0.408*w;
e4=0.1075*w;
f1=0*w;
f2=-0.036*w;
f3=0.0893*w;
f4=0.27*w;
x=e1;
y=0;
for i=1:imax
   r=rand;
   if r<=0.02
      xn=0*x+0*y+e1;
      yn=(0*x+0.27*y+f1);
      yalv=(300-yn);
      plot(xn,w-yalv);
      x=xn;
      y=yn;
   elseif r<=0.17
      xn=-.139*x+.263*y+e2;
      yn=(.246*x+.224*y+f2);
      yalv=(300-yn);
      plot(xn,w-yalv);
      x=xn;
      y=yn;
   elseif r<=0.3
      xn=.17*x-.215*y+e3;
      yn=(.222*x+.176*y+f3);
      yalv=(300-yn);
      plot(xn,w-yalv);
      x=xn;
      y=yn;
   else xn=.781*x+.034*y+e4;
      yn=(-.032*x+.739*y+f4);
      yalv=(300-yn);
      plot(xn,w-yalv);
```

```
        x=xn;
        y=yn;
    end
end
```

El resultado obtenido es:



Es impresionante descubrir como puede obtenerse semejante representación gráfica de un proceso en el que interviene el azar. Supuestamente no debería descubrirse relación alguna entre los puntos generados, pero si se repite el experimento varias veces con diferentes números aleatorios; lo mismo se obtendrá gráficos semejantes al anterior.

Existen dos facetas destacables en el juego del caos. La primera es que la figura geométrica que surge del algoritmo aleatorio es compleja. Segundo, dicha figura surgirá no importa que semilla se utilice para comenzar el juego. Con probabilidad 1 la órbita de cualquier semilla llenará eventualmente el espacio que el algoritmo le asigna y siempre formará la misma figura.